Теория физических структур

Ю.И. Кулаков, А.А. Симонов
germenevtika@mail.ru, Andrey.Simonoff@gmail.com

Аннотация. *"Теория физических структур" даёт математическое определение понятия физического закона. Рассматриваются различные варианты аксиом физических структур. Приводятся примеры физических структур и алгебраических систем, над которыми они могут быть построены.*

Ключевые слова

Физический закон, физическая структура, кортеж, корт, группа, матрица.

1 Введение

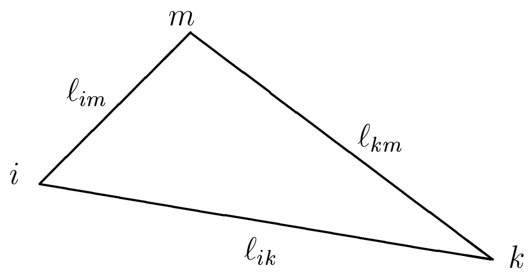
Что такое "*физический закон*"? Если понимать его как философскую категорию, то это "*устойчивый тип отношений*". Однако, что понимать под "*отношениями*" и, что такое "*устойчивый тип*"? В зависимости от конкретизации данных понятий можно рассматривать различные "*физические законы*". В *Теории физических структур* (далее ТФС) [1] дана интерпретация этих понятий и получены определённые утверждения относительно существования самих "отношений". *Теория физических структур* Ю.И. Кулакова представляет собой алгебраическую теорию метрических отношений между элементами произвольной природы, нацеленную на переосмысление законов физики. В её основе лежит *феноменологическая симметрия* физических законов. Эта теория была сформулирована Ю.И. Кулаковым в Новосибирске в 60-х годах прошлого века [2].

Перейдём к некоторым примерам, характеризующим суть вопроса. В качестве простейшего можно рассмотреть геометрию ([1], Часть 2, Глава 6, §4). Действительно, произведя экспериментальные измерения расстояний между точками, можно убедиться, лежат ли точки на одной прямой, плоскости, объеме и пр. Рассмотрим конечное множество $\mathfrak{M} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, состоящее из n произвольно расположенных в трёхмерном пространстве точек. Можно ли утверждать, что, несмотря на совершенно произвольное их расположение, существует вполне определённый физический закон (то есть закон, справедливость которого может быть установлена экспериментальным путём), которому подчиняются все точки множества $\mathfrak{M}$? Чтобы обнаружить его, необходимо рассмотреть все возможные пары точек из $\mathfrak{M}$, их будет $\frac{1}{2}n(n-1)$, сопоставляя каждой паре экспериментально измеряемую величину, характеризующую взаимное расположение точек. В качестве такой, измеряемой на опыте, величины примем в простейшем случае расстояние, измеренное, например, с помощью обычной масштабной линейки.

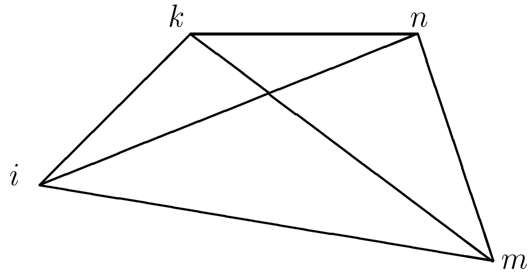
Сопоставляя каждой паре точек (i, k) расстояние ℓ_{ik}, мы получим набор опытных данных, полностью характеризующих данное множество $\mathfrak{M}$, который может быть представлен в виде следующей симметрической матрицы:

$$\begin{array}{c|ccccc} & i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \\ \hline i_1 & 0 & \ell_{12} & \ell_{13} & \ldots & \ell_{1n} \\ i_2 & \ell_{12} & 0 & \ell_{23} & \ldots & \ell_{2n} \\ i_3 & \ell_{13} & \ell_{23} & 0 & \ldots & \ell_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ i_n4 & \ell_{1n} & \ell_{2n} & \ell_{3n} & \ldots & 0 \end{array}$$

Ясно, что взаимные расстояния $\ell_{ik}, \ell_{im}, \ell_{km}$ между *тремя* произвольными точками $i, k, m \in \mathfrak{M}$ не могут быть связаны между собой функциональной зависимостью, так как при фиксированных расстояниях ℓ_{ik} и ℓ_{im}, третье расстояние ℓ_{km} может принимать различные значения от $|\ell_{ik} - \ell_{im}|$ до $\ell_{ik} + \ell_{im}$:

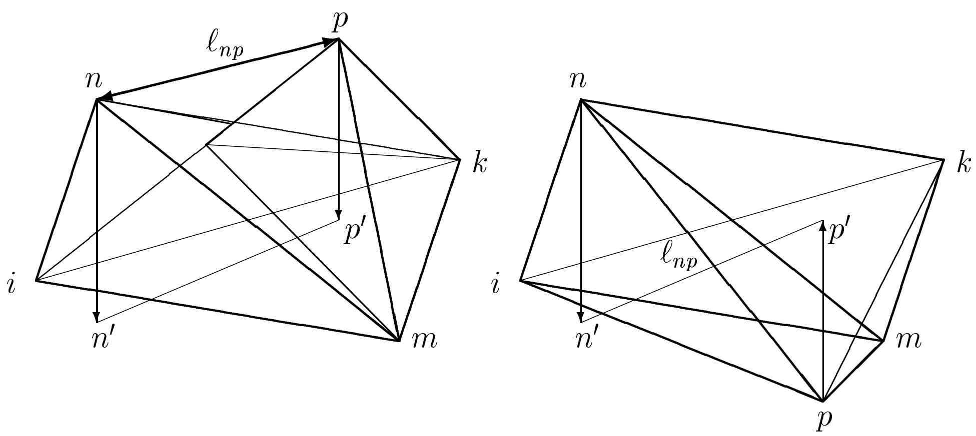


Точно так же обстоит дело, если взять *четыре* произвольные точки $i, k, m, n \in \mathfrak{M}$:



и рассмотреть зависимость между *шестью* взаимными расстояниями $\ell_{ik}, \ell_{im}, \ell_{in}, \ell_{km}$, ℓ_{kn}, ℓ_{mn}. При фиксированных пяти расстояниях $\ell_{ik}, \ell_{im}, \ell_{in}, \ell_{km}$, ℓ_{kn} шестое расстояние ℓ_{mn} может принимать различные значения из некоторого интервала.

Но если взять *пять* произвольных точек $i, k, m, n, p \in \mathfrak{M}$, то одно из *десяти* взаимных расстояний $\ell_{ik}, \ell_{im}, \ell_{in}, \ell_{ip}, \ell_{km}, \ell_{kn}, \ell_{kp}, \ell_{mn}, \ell_{mp}, \ell_{np}$ является двузначной функцией остальных девяти.

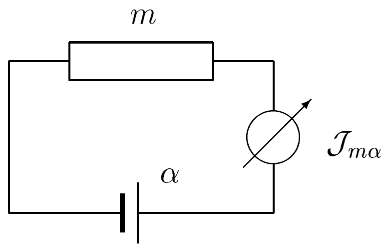


Итак, для любых пяти точек трёхмерного евклидова пространства существует функциональная связь между их взаимными расстояниями, вид которой не зависит от выбора этих точек:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ 1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ 1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ 1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 & \ell_{np}^2 \\ 1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & \ell_{np}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Для рассмотрения более физических примеров обратимся к идее объектов разной природы в противоположность геометрии, где все точки взяты из одного множества. В этом случае, двум точкам из двух разных множеств сопоставляется измерительная процедура, некий аналог *расстояния*.

Рассмотрим пример из книги Ю.И. Кулакова ([1], Часть 2, Глава 5, §2). Возьмём три произвольных проводника $i, k, m \in \mathfrak{M}$ и два произвольных источника тока $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$. Измерим *шесть* показаний амперметра $\mathcal{J}_{i\alpha}, \mathcal{J}_{i\beta}, \mathcal{J}_{k\alpha}, \mathcal{J}_{k\beta}$, $\mathcal{J}_{m\alpha}, \mathcal{J}_{m\beta}$ по схеме:



С достаточной степенью точности имеет место соотношение:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{J}_{i\alpha}\mathcal{J}_{i\beta} & \mathcal{J}_{i\alpha} & \mathcal{J}_{i\beta} \\ \mathcal{J}_{k\alpha}\mathcal{J}_{k\beta} & \mathcal{J}_{k\alpha} & \mathcal{J}_{k\beta} \\ \mathcal{J}_{m\alpha}\mathcal{J}_{m\beta} & \mathcal{J}_{m\alpha} & \mathcal{J}_{m\beta} \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

из которого, используя эталонные точки $k, m \in \mathfrak{M}, \beta \in \mathfrak{N}$ легко получить хорошо известный Закон Ома для всей цепи

$$\mathcal{J}_{i\alpha} = \frac{\mathcal{E}_\alpha}{R_i + r_\alpha},$$

где $\mathcal{E}_\alpha$ – электродвижущая сила и r_α – внутреннее сопротивление источника тока, R_i – сопротивление проводника.

Завершим рассмотрение примером из монографии Г.Г. Михайличенко ([3], Введение.). Рассмотрим множество состояний некоторой термодинамической системы. Каждой паре состояний $\langle ij \rangle$ сопоставим два числа, равные двум количествам тепла Q_{ij}^{TS} и Q_{ij}^{ST}, которые система отдает внешним телам при её переходе из состояния i в состояние j сначала по изотерме ($T = const$), а затем по адиабате ($S = const$), в первом случае – процесс TS и сначала по адиабате, а затем по изотерме, во втором – процесс ST, где T – температура и S – энтропия системы.

Двухкомпонентная числовая функция $Q_{ij} = (Q_{ij}^{TS}, Q_{ij}^{ST})$ задает на плоскости (S, T) состояний термодинамической системы *двуметрическую геометрию* и является в этой геометрии некоторым аналогом *расстояния* между точками i и j. Возьмем на плоскости (S, T) *три* произвольные состояния $\langle ijk \rangle$, порядок следования которых определяется записью тройки. Тогда, дополнительно к *расстоянию* Q_{ij} можно выписать еще два Q_{ik}, Q_{jk} для пар состояний $\langle ik \rangle$ и $\langle jk \rangle$. Все три двухкомпонентных *расстояния* оказываются связанными между собой двумя тождествами

$$\begin{vmatrix} 0 & -Q_{ij}^{ST} & -Q_{ik}^{ST} \\ Q_{ij}^{TS} & 0 & -Q_{jk}^{ST} \\ Q_{ik}^{TS} & Q_{jk}^{TS} & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} Q_{ij}^{TS} & Q_{jk}^{TS} & -Q_{ik}^{ST} \\ Q_{ik}^{TS} & 0 & -Q_{ik}^{ST} \\ Q_{ik}^{TS} & -Q_{ij}^{ST} & -Q_{jk}^{ST} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

справедливыми для любой тройки состояний $\langle ijk \rangle$.

Во всех трёх рассмотренных примерах имеются две функции — f и Φ. С одной стороны функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$ — это аналог измерительной прцедуры, ставящая в соответствие двум "точкам"$i \in \mathfrak{M}, \alpha \in \mathfrak{N}$ некоторое значение $f_{i\alpha}$ (*расстояние*). С другой стороны, имеется нетривиальная функция $\Phi : B^{nm} \to B$, построенная над полученными расстояниями. Данная фунция от nm расстояний $f_{i\alpha}$, построенных над определённым колличеством точек $i_1, \ldots, i_n \in \mathfrak{M}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathfrak{N}$, тождественo обращается в ноль, что говорит о наличии связи между этими расстояниями. Далее постараемся абстрагироваться от "физической" интерпритации и рассмотреть данную задачу как математическую.

2 Физические структуры на двух множествах

Несколько слов о терминологии. Исторически использовалось понятие *физическая структура* и это было оправданно, т.к. рассматривалось только одно приложение данных структур — классификация физических законов. Но в последнее время появилось достаточно много работ в этой области, которые напрямую никак не связаны с физикой. В большей степени это исследования по геометрии [4, 5, 6], группам [7, 8] абстрактным алгебрам [9, 10]. По этой причине использование термина *физическая структура* в настоящий момент не совсем оправданно и может вводить в заблуждение, но продолжим его использование с учётом этого замечания. Обратим ещё внимание, что наряду с термином *физическая структура на двух множествах* получил распространение и термин *геометрия двух множеств* [3], что обусловлено глубокой внутренней связью с обычной геометрией, рассматриваемой над одним множеством.

Рассмотрим теперь *физическую структуру* (далее ФС) ранга (n, m), где $n, m \in \mathbb{N}$, построенную над множествами $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, B. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из элементов $i_1, i_2, \ldots \in \mathfrak{M}$, а множество $\mathfrak{N}$ из элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathfrak{N}$. На подмножестве прямого произведения $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ действует отображение $f : \mathfrak{S}_f \to B$, ставящее в соответствие паре $i \times \alpha \in \mathfrak{S}_f$ элемент $f_{i\alpha} \in B$, т.е. $f : i \times \alpha \mapsto f_{i\alpha}$. Для данной функции введём специальное название — *репрезентатор*, а элементы $f_{i\alpha}$ множества B будем называть *расстоянием* между точками i и α, но без наделения свойств присущих обычному расстоянию.

Рассмотрим далее упорядоченные наборы из n и m элементов соответствующих множеств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, так называемые *кортежы*, для которых введём специальные названия — *корт* и будем их записывать в предложенном Полем Дираком виде, как "*бра*" — $\langle i_1, i_2, \ldots, i_n| \in \mathfrak{M}^n$ и "*кет*" — $|\alpha_1, \alpha_2, \quad \ldots, \alpha_m\rangle \in \mathfrak{N}^m$. Необходимость введения нового названия обусловлена специфичностью нового объекта, который несёт дополнительную информацию и свойства. В действительности, *вектор* так же является кортежем, но ввиду того, что этот кортеж с дополнительными свойствами, связанными с аксиомами векторного пространства, то он получил и своё уникальное имя. Аналогичная ситуация и с кортом. В дополнение к понятию корта введём ещё одно понятие — *бикорт* $\langle i_1, i_2, \ldots, i_n|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\rangle \in B^{nm}$, построенного на кортах $\langle i_1, i_2, \ldots, i_n| \in \mathfrak{M}^n$, $|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\rangle \in \mathfrak{N}^m$ и представляющую из себя матрицу вида:

$$\langle i_1, i_2, \ldots, i_n|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\rangle = \begin{pmatrix} \langle i_1|\alpha_1\rangle & \langle i_1|\alpha_2\rangle & \cdots & \langle i_1|\alpha_m\rangle \\ \langle i_2|\alpha_1\rangle & \langle i_2|\alpha_2\rangle & \cdots & \langle i_2|\alpha_m\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle i_n|\alpha_1\rangle & \langle i_n|\alpha_2\rangle & \cdots & \langle i_n|\alpha_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Бикорт $\langle i|\alpha\rangle = f(i\times\alpha) = f_{i\alpha}$ равен *расстоянию* между кортами $\langle i|$ и $|\alpha\rangle$. Если определена функция $\Phi : B^{nm} \to B$, имеющая так же своё название — *верификатор*, то можно говорить и о расстоянии между кортами $\langle i_1, i_2, \ldots, i_n|$, $|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\rangle$.

Отображения f, Φ определяют на множествах $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, B физическую структуру ранга (n, m) если выполнена:

Аксиома I. *Для произвольных кортов* $\langle i_1, i_2, \ldots, i_n| \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{M}^n} \subseteq \mathfrak{M}^n$, $|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\rangle \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{N}^m} \subseteq \mathfrak{N}^m$ *справедливо тождество* $\Phi\left(\langle i_1, i_2, \ldots, i_n|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\rangle\right) = const.$

Данная аксиома определяет *феноменологическую симметрию,* т.е. инвариантность относительно выбора кортов, и является, по сути, основной аксиомой в теории физических структур. Безусловно, без дополнительных требований на отображения f, Φ и подмножества $\mathfrak{S}_f, \mathfrak{S}_{\mathfrak{M}^n}, \mathfrak{S}_{\mathfrak{N}^m}$ выполнение только аксиомы I будет приводить и к появлению большого колличества тривиальных ФС. Но все остальные аксиомы, в этом контексте, являются техническими аксиомами, позволяющими избежать тривиальных решений, либо при помощи которых можно решать определённые задачи, например, задачи классификации решений физических структур на определённых множествах. Ниже приведём несколько примеров систем аксиом в ТФС.

2.1 Аксиомы физических структур

2.1.1 Система аксиом для физических структур на гладких многообразиях

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющиеся sm–мерным и sn–мерным многообразиями, где s, m и n — натуральные числа, точки которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \to \mathbb{R}^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, сопоставляющая каждой паре $i \times \alpha \ \in \mathfrak{S}_f$ совокупность вещественных чисел $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha)) \in \mathbb{R}^s$. Заметим, что в общем случае $\mathfrak{S}_f \neq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, то есть функция f не всякой паре из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляет набор из s чисел. Обозначим через $U(i)$ и $U(\alpha)$ окрестности точек $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, через $U(i\alpha)$ – окрестность пары $i \times \alpha \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ и, аналогично, окрестности кортов из других прямых произведений множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ на себя или друг на друга.

Для некоторых кортов $\langle k_1 \ldots k_n| \in \mathfrak{M}^n$ и $|\gamma_1 \ldots \gamma_m\rangle \in \mathfrak{N}^m$ введем функции $f^n = f[k_1 \ldots k_n]$ и $f^m = f[\gamma_1 \ldots \gamma_m]$, сопоставляя точкам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ точки $(f(k_1\alpha), \ldots, f(k_n\alpha)) \in \mathbb{R}^{sn}$ и $(f(i\gamma_1), \ldots, f(i\gamma_m)) \in \mathbb{R}^{sm}$, если пары $k_1 \times \alpha, \ldots, k_n \times \alpha$ и $i \times \gamma_1, \ldots, i \times \gamma_m$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Заметим, что функции f^m и f^n не обязательно определены всюду на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

Аксиома II. *Область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ множество.*

Аксиома III. *Функция f в области своего определения есть достаточно гладкая функция.*

Аксиома IV. *В $\mathfrak{M}^n$ и $\mathfrak{N}^m$ плотны множества таких кортов длины n и m, для которых функции f^n и f^m имеют максимальные ранги, равные n и m, в точках плотных в $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ множеств соответственно.*

Достаточная гладкость означает, что в области своего определения непрерывна как сама функция f, так и все её производные достаточно высокого порядка. Заметим также, что ограничения в аксиомах II, III, IV открытыми и плотными подмножествами связаны с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

Введём ещё функцию F, сопоставляя бикору $\langle ijk \ldots v|\alpha\beta\gamma \ldots \tau\rangle$ длины $n + m + 2$ из $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ точку $(\langle i|\alpha\rangle, \langle i|\beta\rangle, \ldots, \langle v|\tau\rangle) \in \mathbb{R}^{s(n+1)(m+1)}$, координаты которой в $\mathbb{R}^{s(n+1)(m+1)}$ определяются упорядоченной по исходному бикорту последовательностью значений функции f для всех пар его элементов: $i \times \alpha, i \times \beta, \ldots, v \times \tau$, если эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения введённой функции есть, очевидно, открытое и плотное в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ множество, которое обозначим через $\mathfrak{S}_F$.

Определение 1. Будем говорить, что функция f, удовлетворяющая аксиомам II, III, IV, задает на sm–мерном и sn–мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *s–метрическую физическую структуру ранга* $(n+1, m+1)$,если выполняется аксиома:

Аксиома I. *Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество такое, что для каждого бикорта $\langle ijk \ldots v|\alpha \ \beta\gamma \ldots \tau\rangle$ длины $m+n+2$ и некоторой его окрестности $U(\langle ijk \ldots v|\alpha\beta\gamma \ldots \tau\rangle)$ найдётся такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^s$, определённая в некоторой области $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{s(m+1)(n+1)}$, содержащей точку $F(\langle ijk \ldots v|\alpha\beta\gamma \ldots \tau\rangle)$, что в ней rang $\Phi = s$ и множество $F(U(\langle ijk \ldots v|\alpha\beta\gamma \ldots \tau\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть*

$$\Phi(\langle ijk \ldots v|\alpha\beta\gamma \ldots \tau\rangle) = 0 \tag{3}$$

для всех бикортов из $U(\langle ijk \ldots v|\alpha\beta\gamma \ldots \tau\rangle)$.

Аксиома I составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур, предложенной Ю.И. Кулаковым. Уравнения (3) задают s функциональных связей между $s(m+1)(n+1)$ измеряемыми в опыте значениями физических величин $f = (f^1, \ldots, f^s)$ и являются аналитическим выражением физического закона, записанного в феноменологически инвариантной форме. Условие $rang\Phi = s$ означает, что уравнения $\Phi = 0$ (то есть $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_s = 0$) независимы.

2.1.2 Групповое определение физических структур

Групповая симметрия ФС и её эквивалентность феноменологической симметрии были установлены Михайличенко Г.Г. в 1985 году ([11], опубликована в ДАН по представлению академика А.Д.Александрова, а соответствущие полные доказательства можно найти в монографии [3]).

Под локальным движением в геометрии двух множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будем понимать такую пару взаимно однозначных гладких отображений:

$$\lambda : U \to U' \text{ и } \sigma : V \to V', \tag{4}$$

где $U, U' \subset \mathfrak{M}$ и $V, V' \subset \mathfrak{N}$ – открытые области, при которых функция f сохраняется. Последнее означает, что для каждой пары $i \times \alpha \ \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i \in U$, $\alpha \in V$ и $i' \times \alpha' \ \in \mathfrak{S}_f$, где $i' = \lambda(i) \in U'$, $\alpha' = \sigma(\alpha) \in V'$, имеет место равенство

$$\langle \lambda(i) | \sigma(\alpha) \rangle = \langle i | \alpha \rangle. \tag{5}$$

Множество всех движений (4) есть локальная группа, для которой функция f, согласно равенству (5), является двухточечным инвариантом. Преобразования λ и σ в движениях (4) сами составляют две отдельные группы, а группа движений есть их взаимное расширение. Если функция f известна, то равенство (5) представляет собой функциональное уравнение относительно преобразований λ и σ. Если же о функции f известно только, что она невырождена и феноменологически инвариантна, то есть, удовлетворяет некоторой системе s независимых уравнений (3), то этого, оказывается, достаточно для установления факта существования группы ее движений, зависящей от smn параметров.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$, удовлетворяющая аксиомам II, III, IV, задаёт на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрическую геометрию, наделённую групповой симметрией степени smn, если дополнительно выполняется следующая аксиома:

Аксиома I$'$. Существуют открытые и плотные в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множества, для всех точек i и α которых определены эффективные гладкие действия smn-мерной локальной группы Ли в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$, такие, что действия её в окрестностях $U(i), U(j)$ и $U(\alpha), U(\beta)$ точек i, j и α, β совпадают в пересечениях $U(i) \cap U(j)$ и $U(\alpha) \cap U(\beta)$ и что функция f является двухточечным инвариантом по каждой из своих s компонент.

Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме I$'$, определяют своеобразную локальную подвижность жестких фигур ("*твердых тел*") в пространстве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ с smn степенями свободы.

2.1.3 Алгебраическая система аксиом

Определённая выше ФС обладает тем свойством, что для неё, практически всегда, функцию Φ можно разрешить относительно любого из аргументов. В таком случае, данное свойство можно поставить во главу угла. Тогда будем говорить, что определена алгебраическая *физическая структура* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B, f)$ ранга $(n+1, m+1)$, где $n, m \in \mathbb{N}$, на множествах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $B, \mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}, \mathfrak{S}_g \subseteq B^{n+nm+m}$, если выполнена аксиома:

Аксиома I. *Определены такие отображения*

$$f\colon \mathfrak{S}_\mathfrak{f} \to B, \ g\colon \mathfrak{S}_g \to B,$$

что для произвольных кортов $\langle i_0, i_1, \ldots, i_n | \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{S}_{\mathfrak{M}^n} \subseteq \mathfrak{M}^{n+1}$ *и* $|\alpha_0, \, \alpha_1, \ldots, \, \alpha_m\rangle \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{S}_{\mathfrak{N}^m} \subseteq \mathfrak{N}^{m+1}$ *справедливо тождество*

$$\langle i_0 | \alpha_0 \rangle = g \begin{pmatrix} & \langle i_0 | \alpha_1 \rangle & \cdots & \langle i_0 | \alpha_m \rangle \\ \langle i_1 | \alpha_0 \rangle & \langle i_1 | \alpha_1 \rangle & \cdots & \langle i_1 | \alpha_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle i_n | \alpha_0 \rangle & \langle i_n | \alpha_1 \rangle & \cdots & \langle i_n | \alpha_m \rangle \end{pmatrix},$$

Отображение $g\colon \mathfrak{S}_g \to B$ также будем называть верификатором. Кроме этого выполнены дополнительные условия:

Аксиома II. *Для произвольного корта* $(\forall\langle i_1, i_2, \ldots, i_n| \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{M}^n})$ *и произвольных упорядоченных* n *элементов* $(\forall(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathfrak{S}_{B^n})$ *найдётся единственный элемент* $(\exists!\ \alpha \in \mathfrak{N})$, *для которого справедливы равенства* $\langle i_k|\alpha\rangle = b_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Аналогично, для второго множества:

Аксиома III. $(\forall|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\rangle \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{N}^m})$, $(\forall(b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \Omega_{B^m})$, $(\exists!\ i \in \mathfrak{M})$: $\langle i|\alpha_k\rangle = b_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Если у нас имеется две физические структуры $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B, f)$ и $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}', B', f')$ ранга $(n+1, m+1)$, то вполне естественно возникает вопрос о их эквивалентности или неэвивалентности. Если изменить шкалу прибора при помощи которого мы измеряем "*расстояние*" между двумя точками, то, вполне очевидно, что такое изменение не должно приводить к появлению "новой" физической структуры. Отразим данное требование в определении:

Определение 3. Две физические структуры $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B, f)$ и $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}', B', f')$ ранга $(n+1, m+1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда найдутся три биективные соответствия $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$, $\chi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}'$, $\psi : B \to B'$, для которых, при произвольных $i \times \alpha \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{f}}$, справедливо

$$\psi(f(i, \alpha)) = f'(\lambda(i), \chi(\alpha)). \tag{6}$$

2.2 Однометрические физические структуры

Первоначально решения в ТФС искались над множеством вещественных чисел, т.е. когда $B = \mathbb{R}$ (т.е. $s = 1$). Кулаков Ю.И. открыл простейшую феноменологически симметричную форму, анализируя строение второго закона Ньютона. Затем Юрий Иванович не только дал определение ФС ранга (2,2), но и, предложенным им методом, доказал теорему о её существовании и единственности ([12], опубликованную в ДАН по представлению академика М.А.Леонтовича). Решение можно записать в аддитивной $\langle i|\alpha\rangle = x_i + \xi_\alpha$ или мультипликативной форме $\langle i|\alpha\rangle = x_i \cdot \xi_\alpha$, для которых соответствующие верификаторы записываются в виде

$$\Phi\left(\langle ij|\alpha\beta\rangle\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \langle i|\alpha\rangle & \langle i|\beta\rangle \\ 1 & \langle j|\alpha\rangle & \langle j|\beta\rangle \end{vmatrix} = 0, \quad \Phi\left(\langle ij|\alpha\beta\rangle\right) = \begin{vmatrix} \langle i|\alpha\rangle & \langle i|\beta\rangle \\ \langle j|\alpha\rangle & \langle j|\beta\rangle \end{vmatrix} = 0 \ \text{ соответственно.}$$

Михайличенко Г.Г. методом Кулакова Ю.И., удалось доказать аналогичную теорему для ФС ранга (3,2), которая появилась из анализа строения закона Ома. Для классификации ФС произвольного $(n+1, m+1)$ ранга, где m и n размерности множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ Михайличенко Г.Г. разработал новый — *функциональный метод* [13]. Воспользовавшись монографией [14], запишем полученные решения с точностью до локально обратимой замены координат в многообразиях $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и масштабного преобразования $\psi(f) \to f$, где ψ – произвольная гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной:
$m = 1, n = 3$:

$$\langle i|\alpha\rangle = (x_1\xi_1 + \xi_2)/(x_1 + \xi_3),$$

$$\Phi\left(\langle ij|\alpha\beta\gamma\delta\rangle\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \langle i|\alpha\rangle & \langle i|\beta\rangle & \langle i|\gamma\rangle & \langle i|\delta\rangle \\ \langle j|\alpha\rangle & \langle j|\beta\rangle & \langle j|\gamma\rangle & \langle j|\delta\rangle \\ \langle i|\alpha\rangle\langle j|\alpha\rangle & \langle i|\beta\rangle\langle j|\beta\rangle & \langle i|\gamma\rangle\langle j|\gamma\rangle & \langle i|\delta\rangle\langle j|\delta\rangle \end{vmatrix} = 0,$$

$m = n \geq 1$:

$$\langle i|\alpha\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_{m-1}\xi_{m-1} + x_m\xi_m,$$
$$\Phi_1\left(\langle i_1 \ldots i_{m+1}|\alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}\rangle\right) = \begin{vmatrix} \langle i_1|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_1|\alpha_{m+1}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle i_{m+1}|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_{m+1}|\alpha_{m+1}\rangle \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

$$\langle i|\alpha\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_{m-1}\xi_{m-1} + x_m + \xi_m,$$
$$\Phi_2\left(\langle i_1 \ldots i_{m+1}|\alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}\rangle\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \langle i_1|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_1|\alpha_{m+1}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \langle i_{m+1}|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_{m+1}|\alpha_{m+1}\rangle \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

$m = n + 1 \geq 2$:

$$\langle i|\alpha\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_{m-1}\xi_{m-1} + x_m,$$
$$\Phi\left(\langle i_1 \ldots i_{m+1}|\alpha_1 \ldots \alpha_m\rangle\right) = \begin{vmatrix} 1 & \langle i_1|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_1|\alpha_m\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \langle i_{m+1}|\alpha_1\rangle & \cdots & \langle i_{m+1}|\alpha_m\rangle \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Для всех остальных пар значений натуральных чисел m и n однометрические физические структуры ранга $(n+1, m+1)$ не существуют.

2.3 Полиметрические физические структуры

Расширение понятия ФС на полиметрические ФС вполне оправданно, когда каждой паре $i \times \alpha \ \in \mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется совокупность s–вещественных чисел $\langle i|\alpha\rangle = f(i \times \alpha) = (f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha)) \in \mathbb{R}^s$. Действительно, в приведённом во введении примере с законом Ома, его истинность (1) будет и в случае переменных токов, но тогда требуется провести одновременно не одно, а два измерения, что эквивалентно $s = 2$. Кроме того, во введении приведён пример построения термодинамики при помощи двух измеряемых на опыте работ цикла Карно (2). И если двуметрический аналог закона Ома можно записать через комплексные числа, то в двуметрической записи термодинамики такой переход невозможен.

Для случаев $B = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ ($s = 2, 3$ и 4) полной классификации решений, с точностью до **локальной эквивалентности**, получить не удалось и, по этой причине, исследовались толко частные случаи. Для двуметрической ФС ранга $(2, n)$ установлено [15], что решение существует только при $n = 2, 3, 4, 5$, при этом были найдены все возможные отображения — $f = (f^1, f^2)$. Также были полностью найдены все триметрические [16] и четыреметрические [17] ФС ранга $(2, 2)$. Ниже приведём решения для двуметрических ФС:
для $n = 1$, то есть ранга $(2, 2)$:

$$f^1 = x_1 + \xi_1, \ f^2 = x_2 + \xi_2;$$

$$f^1 = (x_1 + \xi_2)x_2, \ f^2 = (x_1 + \xi_1)\xi_2;$$

для $n = 2$, то есть ранга $(3, 2)$:

$$f^1 = x_1\xi_1 + \varepsilon x_2\xi_2 + \xi_3, \ f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1 + \xi_4, \ \varepsilon = 0, \pm 1, \tag{10}$$

$$f^1 = x_1\xi_1 + \xi_3, \ f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1^c + \xi_4 \tag{11}$$

$$f^1 = x_1\xi_1 + \xi_3, \ f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1^2 + x_1^2\xi_1^2 \ln|\xi_1| + \xi_4, \tag{12}$$

$$f^1 = x_1\xi_1 + x_2\xi_3, \ f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_4; \tag{13}$$

для $n = 3$, то есть ранга $(4, 2)$:

$$f^1 = \frac{(x_1\xi_1+\varepsilon x_2\xi_2+\xi_3)(x_1+\xi_5)-\varepsilon(x_1\xi_2+x_2\xi_1+\xi_4)(x_2+\xi_6)}{(x_1+\xi_5)^2-\varepsilon(x_2+\xi_6)^2},$$
$$f^2 = \frac{(x_1\xi_1+\varepsilon x_2\xi_2+\xi_3)(x_2+\xi_6)-(x_1\xi_2+x_2\xi_1+\xi_4)(x_1+\xi_5)}{(x_1+\xi_5)^2-\varepsilon(x_2+\xi_6)^2},$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$,

$$f^1 = \frac{x_1\xi_1 + \xi_3}{x_1 + \xi_5},\ f^2 = \frac{x_1\xi_2 + x_2\xi_4 + \xi_6}{x_1 + \xi_5},$$

$$f^1 = x_1\xi_1 + x_2\xi_3 + \xi_5,\ f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_4 + \xi_6; \tag{14}$$

для $n = 4$, то есть ранга $(5, 2)$:

$$f^1 = \frac{x_1\xi_1 + x_2\xi_3 + \xi_5}{x_1\xi_8 + x_2 + \xi_7},\ f^2 = \frac{x_1\xi_2 + x_2\xi_4 + \xi_6}{x_1\xi_8 + x_2 + \xi_7}. \tag{15}$$

Двуметрики (13), (14), (15), а также двуметрика (11) для случая $c = 0$ в форме $f^1 = x_1\xi_1 + x_2 + \xi_3$, $f^2 = x_1\xi_2 + x_2 + \xi_4$, ранее были обнаружены Е.Л.Лозицким (частное сообщение и [18]). Остальные впервые найдены Михайличенко Г.Г., который дополнительно доказал полноту приведённой классификации двуметрик. В указанной ранее статье [18] приведены также несколько примеров двуметрик ранга $(3, 3)$:

$$f^1 = x_1\xi_1 + x_2\xi_2, \quad f^2 = x_3\xi_3 + x_4\xi_4, \tag{16}$$

$$f^1 = x_1\xi_1 + x_2 + \xi_2, \quad f^2 = x_3\xi_3 + x_4 + \xi_4, \tag{17}$$

$$f^1 = x_1\xi_1 - x_2\xi_2 + x_3\xi_3 - x_4\xi_4, \quad f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1 + x_3\xi_4 + x_4\xi_3,$$
$$f^1 = x_1\xi_1 - x_2\xi_2 + x_3 + \xi_3, \quad f^2 = x_1\xi_2 + x_2\xi_1 + x_4 + \xi_4.$$

Нетрудно заметить, что решения (16) и (17) являются прямым произведением двух решений однометрических структур ранга $(3, 3)$, которые вполне естественно дополняются ещё одним решением:

$$f^1 = x_1\xi_1 + x_2\xi_2, \quad f^2 = x_3\xi_3 + x_4 + \xi_4.$$

Существование такого решения следует из общей теоремы построения по s_1 и s_2 метрическим структурам ранга $(n_1 + 1, 2)$ и $(n_2 + 1, 2)$ новой s_3 метрической структуры ранга $(n_3 + 1, 2)$ при помощи феноменологически симметричного произведения [19]. Оставшиеся два решения получаются комплексификацией однометрических решений ФС ранга $(3, 3)$. В работе Михайличенко Г.Г. и Мурадова Р.М. [20] комплексификация расширяется рассмотрением однометрических решений над гиперкомплексными числами ранга 2, т.е. когда, помимо случая с обычной мнимой единицей $i^2 = -1$, необходимо записать ещё решения для $i^2 = 1$ и $i^2 = 0$. Совершенно аналогично можно перейти к триметрическим решениям при рассмотрении однометрических решений над гиперкомплексными числами ранга 3, к четыреметрическим — при рассмотрении над гиперкомплексными числами ранга 4 и т.д. [21].

2.4 Физические структуры на произвольных множествах

2.4.1 Физическая структура ранга $(2, 2)$

Первые шаги в изучении алгебраических систем, возникающих в ТФС, были сделаны в 80–х годах прошлого столетия Витяевым Е.Е. [22] и Иониным В.К. [7] при изучении ФС минимального ранга — (2,2). Витяевым Е.Е., в силу выбранных дополнительных аксиом аддитивной соединительной структуры *Теории Измерений* [23], были получены решения для ФС ранга $(2, 2)$, являющиеся *абелевыми группами.*

Ионин В.К., использовал более слабую систему аксиом, в которой помимо аксиомы I из алгебраической системы аксиом и условия $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = B$, было ещё требование:
II. $(\forall i \times \alpha \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N})(\forall j \in \mathfrak{M})(\forall \beta \in \mathfrak{N})$ отображения $j \mapsto \langle j|\alpha\rangle, \beta \mapsto \langle i|\beta\rangle$ биективны.
При таких ограничениях Ионин В.К. показал эквивалентность класса ФС ранга $(2,2)$ классу всех *групп* — $(B, \cdot, ^{-1})$. В этом случае репрезентатор f записывается через групповую операцию $f(x,y) = \langle i|\alpha\rangle = x \cdot y$, а функция g в виде $g(x,y,z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$ так, что справедливо тождество $\langle i|\alpha\rangle = \langle i|\beta\rangle \cdot \langle j|\beta\rangle^{-1} \cdot \langle j|\alpha\rangle$.

Значительно позже Бородин А.Н. также изучал [9] данную структуру с точки зрения тернарной алгебраической операции — *груды*. Грудой называется алгебра с тернарной операцией $[,,] : B^3 \to B$, удовлетворяющая тождествам:
1. $[[x_1x_2x_3]x_4x_5] = [x_1x_2[x_3x_4x_5]]$,
2. $[x_1x_1x_2] = x_2$, $[x_1x_2x_2] = x_1$.
В работе [9] Бородин А.Н. показал, что над грудой так же можно построить ФС ранга $(2,2)$. Выражение (6), определяющее эквивалентность ФС в случае ФС ранга $(2,2)$ приводит к тому, что любое решение над грудой можно записать в виде эквивалентного решения над группой, с групповой операцией $x \cdot y = [xzy]$, где $z \in B$ — произвольный элемент груды.

В совместной работе Мурадова Р.М. и Кырова В.А. [24] рассматривалась запись репрезентатора и верификатора в виде специальной гвазигруппы Уорда, для которой справедливо $x \circ e = x$ и $x \circ x = e$, где e — правый нейтральный элемент квазигруппы. В данной квазигруппе $\langle i|\alpha\rangle = i \circ \alpha$, а связь четырёх репрезентаторов записывается в виде $\langle i|\alpha\rangle \circ \langle j|\alpha\rangle = \langle i|\beta\rangle \circ \langle j|\beta\rangle$. Но, с другой стороны, такая запись возможна только когда квазигруппа изотопна группе, тогда $x \circ y = x \cdot y^{-1}$ и новых, чисто квзигрупповых решений, не возникает.

Необходимо ещё отметить решение ФС ранга $(2,2)$ над комплексными числами $\mathbb{C}$, полученное Литвинцевым А.А. [25], которое так же, как и в случае вещественных чисел, сводятся к двум изоморфным решениям — сложению $\langle i|\alpha\rangle = x_i + y_\alpha$ и умножению $\langle i|\alpha\rangle = x_i y_\alpha$ комплексных чисел $x_i, y_\alpha \in \mathbb{C}$.

Вернёмся теперь к полиметрическим ФС ранга $(2,2)$ [16, 18], но, воспользовавшись теоремой Ионина В.К. [7], перепишем эти решения в эквивалентном, групповом виде:

Однометрические физические структуры ранга (2,2). Над $B = \mathbb{R}$ можно построить только одну локально неизоморфную группу — аддитивную группу $\mathbb{R}$.

Двуметрические физические структуры ранга (2,2). Над $B = \mathbb{R}^2$ таких групп уже две, причем они построены при помощи прямого $G_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и полупрямого произведения $G_2 = \mathbb{R} \leftthreetimes \mathbb{R}_0$, где $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. При этом подгруппа $\mathbb{R} \lhd G_2$ будет нормальной. Полупрямое произведение можно построить тогда и только тогда, когда для группы $G = N \leftthreetimes H$ существует гомоморфизм подгруппы H в подгруппу автоморфизмов нормальной группы $H \to N' \subseteq Aut(N)$. Аддитивная группа $\mathbb{R}$ обладает естественным автоморфизмом, который строится при помощи умножения на любое число из $\mathbb{R}_0$, следовательно, группу G_2, получающуюся при помощи полупрямого произведения аддитивной и мультипликативной групп, можно записать в виде $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_2 + y_1, x_2y_2)$.

Триметрические физические структуры ранга (2,2). Над $B = \mathbb{R}^3$ можно построить уже семь локально неизоморфных групп:

$G_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Аддитивная группа $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ обладает следующим однопараметрическим автоморфизмом: $(x_1, x_2)^a = (x_1 + x_2 a, x_2)$, тогда группа $G_2 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \leftthreetimes \mathbb{R}_0$ или покомпанентно $G_2(x,y) = G_2(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) = (x_1 + y_1 + x_2y_3, x_2 + y_2, x_3y_3)$. Данная группа имеет собственное название — трёхмерная группа Гейзенберга или группа Nil.

Группы G_3, G_4 и G_5 строятся совершенно аналогично, но используются только другие автоморфизмы аддитивной группы $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, а именно:

$$(x,y)^a = (ax, a(y - x\ln|a|)) \;\Rightarrow\; G_3(x,y) = (x_3y_1 + x_1, x_3(y_2 - y_1\ln|x_3|) + x_2, x_3y_3);$$

$$(x,y)^a = (ax, |a|^p y) \;\Rightarrow\; G_4(x,y) = (x_3y_1 + x_1, |x_3|^p y_2 + x_2, x_3y_3); \tag{18}$$

$$(x,y)^a = ((x\cos(a) - y\sin(a))e^{\gamma a}, (x\sin(a) + y\cos(a))e^{\gamma a}) \ \Rightarrow$$

$$G_5(x,y) = ((x_1\cos(y_3) - x_2\sin(y_3))\exp(\gamma y_3) + y_1, (x_1\sin(y_3) + x_2\cos(y_3))\exp(\gamma y_3) + y_2, x_3 + y_3),$$

при этом подгруппа $H < N \leftthreetimes H$ в первых двух случаях будет изоморфна мультипликативной группе $\mathbb{R}_0$, а в последнем случае изоморфна $\mathbb{R}$, т.е. G_3 и G_4 можно представить в виде $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \leftthreetimes \mathbb{R}_0$, а $G_5 \approx (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \leftthreetimes \mathbb{R}$. Группа (18) при $p = -1$ изоморфна группе Sol.

Ещё два решения не содержат нормальных подгрупп N, а, следовательно, просты: G_6 изоморфна группе $SO(3)$, а группа $G_7 \approx SL(2,\mathbb{R})$.

2.4.2 Физические структуры ранга (3,2)

Если физическую структуру ранга $(2,2)$ можно построить над алгебраической структурой с одной бинарной операцией — группой, то для построения ФС ранга $(3,2)$ требуется более богатая алгебраическая структура. Из работ Михайличено Г.Г. известно, что над полем вещественных чисел можно построить ФС ранга $(3,2)$ с репрезентатором, определённом в виде $\langle i|\alpha\rangle = x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha$. Более того, такой репрезентатор будет справедлив, построенный и над произвольным полем, телом, почтиполем или над правой почтиобластью [26]. В отличие от поля P, в котором имеется две операции — аддитивная и мультипликативная, связанные между собой правой и левой дистрибутивностью, в почтиполе отсутствует одна из дистрибутивностей, а мультипликативная операция может быть не коммутативной. В правой почтиобласти аддитивная операция может быть уже не групповой, а только правой лупой. Кроме того оставшаяся дистрибутивность может тоже выполняться в приближённом виде.

Под **правой лупой** будем понимать алгебраическую систему $(B,+,-,0)$ с двумя частичными бинарными операциями $(+/-) : B\times B_0 \to B$, где $B_0 = B\backslash\{0\}$, и левым нейтральным элементом — 0, для которой выполнены тождества:
1. $(\forall x\in B_0)$ $(0+x=x)$,
2. $(\forall x\in B)$ $(\forall y\in B_0)$ справедливы равенства $(x+y)-y=x$ и $(x-y)+y=x$.

Под **правой почтиобластью** будем понимать алгебраическую систему $(B,+,-,\cdot,^{-1},0)$, в которой подалгебрами являются $(B,+,-,0)$ — правая лупа и $(B,\cdot,^{-1})$ — группа, для которых справедливы тождества:
A1. $(\forall x\in B)(\forall y,z\in B_0)(\exists\ h(y,z)\in B_0)$ $(x+y)z = xh(y,z)+yz$;
A2. $(\forall x\in B)(\forall y,z\in B_0:\ y+z\neq 0)(\exists\ r(y,z)\in B_0)$ $(x+y)+z = xr(y,z)+(y+z)$;
A3. $(\forall x\in B)(\forall z\in B_0)(\exists\ v(z)\in B_0)$ $(x+(0-z))+z = xv(z)$.
Тождество из **A1** приводит к нарушению правой дистрибутивности, левой дистрибутивности не требуется. Тождество **A2** описывает нарушение ассоциативности, **A3** обусловлено тем, что бинарные операции являются частичными. В действительности, легко показать, что все функции из A1-A3 легко выражаются через левую обратную $L : B_0 \to B_0$ в аддитивной операции $L(x)+x=0$, более того в правой почтиобласти выполнено:
1. $(\forall x\in B_0)$ $0\cdot x = 0$;
2. $h(y,z) = EL(y)\cdot L(yz)$;
3. $v(z) = EL^2(z)z$:
4. $x - z = x\cdot v^{-1}(z) + L(z) = x\cdot EL^2(z)z + L(z)$;
5. $r(y,z) = (L(z)-y)^{-1}\cdot L(y+z) = (L(z)\cdot EL^2(y)y + L(y))^{-1}\cdot L(y+z)$,
где $E(x) = x^{-1}$, EL — суперпозиция преобразований L и E.

Рассмотрим несколько примеров правых почтиобластей $(\mathbb{K},\oplus,\ominus,\cdot,^{-1},0)$, построенных над телом $(\mathbb{K},+,-,\cdot,^{-1},0)$:

$$x\oplus y = -xa^{-1}+y,\ L(x) = ax,\ r(y,z) = -a^{-1},\ v(z) = a^{-2}.$$

В такой правой почтиобласти выполняется двухсторонняя дистрибутивность и справедливо тождество $L(x\oplus y) = L(x)\oplus L(y)$. Для второго примера над телом:

$$x\oplus y = xy^2+y,\ L(x) = -x^{-1},\ r(y,z) = y^2z(z+y)^{-1}(yz+1),\ h(y,z) = z^{-1}$$

это соотношение не выполняется $L(x \oplus y) \neq L(x) \oplus L(y)$, но выполнено $L(x) \oplus x = x \oplus L(x) = 0$.

Над правой почтиобластью, при помощи функции $f(x,y,z) = x \cdot (y-z) + z$ можно построить группу с умножением:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1,y_1,y_2) \\ f(x_2,y_1,y_2) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

тогда верификатор (9) для ФС ранга (3,2) можно записать в виде:

$$\langle i|\alpha\rangle \begin{pmatrix} \langle j|\alpha\rangle \\ \langle k|\alpha\rangle \end{pmatrix}^{-1} = \langle i|\beta\rangle \begin{pmatrix} \langle j|\beta\rangle \\ \langle k|\beta\rangle \end{pmatrix}^{-1}.$$

Если рассмотреть правую почтиобласть в которой для мультипликативной операции вместо одного левого аннулятора — 0, имеется целое множество левых аннуляторов, т.е. $(\forall a \in A)(\forall x \in B_0)(a \cdot x = a)$, тогда двуметрические решения (см. стр. 8) можно записать через аддитивные и мультипликативные операции правой почтиобласти, определённые на плоскости:

Решение 1, для двуметрики (10):

$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1y_1 + \varepsilon x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1), \quad (\varepsilon = -1,0,1)$,

$(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$.

Решение 2, для двуметрики (11):

$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2|y_1|^c), \quad c \in [0;1)$,

$(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$.

Решение 3, для двуметрики (12):

$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1^2 + (x_1-1)x_1y_1^2\ln|y_1|)$,

$(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2+2x_1y_1\ln|y_1|)$.

Решение 4, для двуметрики (13):

$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2)$,

$(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (y_1x_2 - x_1y_2, (y_1x_2 - x_1y_2)\frac{y_2}{y_1} - \frac{x_1}{y_1})$.

В решениях 2–4 мультипликативные операции изоморфны. Во всех случаях, за исключением последнего решения, нулевой элемент 0 в мультипликативной операции — двусторонний. В решении 4 нулевой элемент только левосторонний. В решениях 2–4, несмотря на их внешнее различие, левые обратные в аддитивной операции определяются одинаково $L(x) = (-1,0)\cdot(x_1,x_2)$. Алгебраические системы над которыми могут быть построены изоморфные группы (19) можно записать и через другую аддитивную операцию, причём совпадающую для решений 2 и 3:

Решение $2'$:

$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2|y_1|^c), \quad c \in [0;1)$,

$(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2+2\frac{x_1y_2}{y_1})$.

Решение $3'$:

$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1^2 + (x_1-1)x_1y_1^2\ln|y_1|)$,

$(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2+2\frac{x_1y_2}{y_1})$.

Решение $4'$:

$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2)$,

$(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (y_1x_2 + x_1y_2, (y_1x_2 + x_1y_2)\frac{y_2}{y_1} - \frac{x_1}{y_1})$.

В данном случае левые обратные уже выражаются в виде $L(x) = (x_1,x_2)\cdot(-1,0)$, а нулевой элемент 0 в аддитивных операциях строго левосторонний, т.е. аддитивная операция является частичной.

Из данного примера и примеров правых почтиобластей над телом видна неоднозначность выбора неизоморфных алгебраических систем, над которыми можно построить одну и ту–же ФС и группу (19). Но, оказывается, имеется один инвариант для таких неизоморфных алгебраических систем — унарная операция $\varphi_2 : B \to B$, определённая в виде $\varphi_2(x) = x \cdot L(e) + e$, где $e \in B_0$ — нейтральный элемент в группе $(B_0, \cdot, ^{-1})$.

2.4.3 Физические структуры ранга (n,2)

Построим унарную операцию $\varphi_2(x) = x(0-e)+e = xa+e$. Для данной операции справедливо тождество

$$\varphi_2^2(x) = (xa+e)a+e = (xL(a)+a)+e = xL(a)EL^2(e) = x.$$

Из определения следует $\varphi_2(e) = a+e = 0$ и $\varphi_2(0) = e$. При помощи отображения φ_2 можно выразить аддитивные операции: $x+y = \varphi_2(xEL(y))y$ и $x-y = \varphi_2(xy^{-1})L(y)$. Можно показать, что для унарной операции φ_2 справедливо тождество:

$$\varphi_2(\varphi_2(x)\varphi_2(y)) = \varphi_2(x\varphi_2(y^{-1}))y. \tag{20}$$

На множестве $\widehat{B^2} = \{y_1 \times y_2 \in B^2 | \varphi_2(y_1y_2^{-1}), y_2 \in B_0 \vee \varphi_2(\varphi_2(y_1)E\varphi_2(y_2)), \varphi_2(y_2) \in B_0\}$ определим функцию $f : B \times \widehat{B^2} \to B$ в виде

$$f_{(3,2)}(x, y_1, y_2) = \varphi_2(x\varphi_2(y_1y_2^{-1}))y_2, \tag{21}$$

при условии, что $y_2 \in B_0$ и $y_1 \times y_2 \in \widehat{B^2}$. В случае $y_2 \in A$ (т.е. из множества левых ануляторов группы B_0), но при $\varphi(y_2) \in B_0$ и $y_1 \times y_2 \in \widehat{B^2}$ функция f определяется в виде

$$f_{(3,2)}(x, y_1, y_2) = \varphi_2\left(\varphi_2(x\varphi_2(\varphi_2(y_1)E\varphi_2(y_2)))\varphi_2(y_2)\right). \tag{22}$$

Если мы рассматриваем только локальные группы Ли, тогда нам достаточно определения функции в виде (19), т.к. размерность множества левых ануляторов $\dim(A) < \dim(B_0)$, а (22) достаточно заменить на $f_{(3,2)}(x, y_1, 0) = xy_1$. При помощи функции $f_{(3,2)}$ строится групповое умножение вектор–столбцов (19).

Если в алгебраической системе $(B, \cdot, ^{-1}, \varphi_2)$ имеется такая унарная операция φ_3, для которой выполнено (20) и справедливо тождество $\varphi_3\varphi_2\varphi_3 = \varphi_2\varphi_3\varphi_2$, тогда можно построить функцию

$$f_{(4,2)}(x, y_1, y_2, y_3) = \varphi_3\left(f_{(3,2)}(x, \varphi_3(y_1y_3^{-1}), \varphi_3(y_2y_3^{-1}))\right) y_3,$$

при помощи которой можно построить групповое умножение вектор–столбцов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{(4,2)}(x_1, y_1, y_2, y_3) \\ f_{(4,2)}(x_2, y_1, y_2, y_3) \\ f_{(4,2)}(x_3, y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix}.$$

Аналогичная ситуация повторяется при построении ФС ранга $(n+1, 2)$, т.е., если в алгебраической системе $(B, \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ имеется такая унарная операция φ_n для которой выполнено (20) и справедливы тождества $\varphi_n\varphi_i\varphi_n = \varphi_i\varphi_n\varphi_i$, для $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, тогда можно построить функцию

$$f_{(n+1,2)}(x, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_n\left(f_{(n,2)}(x, \varphi_n(y_1y_n^{-1}), \ldots, \varphi_n(y_{n-1}y_n^{-1}))\right) y_n, \tag{23}$$

при этом отображение $\sigma_i = \varphi_i\varphi_2\varphi_i$, для $i \in \{3, \ldots, n-1\}$, на мультипликативной группе $(B_0, \cdot, ^{-1})$ задаёт её автоморфизм $\sigma_i(x) \cdot \sigma_i(y) = \sigma_i(x \cdot y)$, кроме того $\varphi_i = \sigma_i\varphi_2\sigma_i$. При помощи функции (23) можно построить групповое умножение вектор–столбцов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{(n+1,2)}(x_1, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_{(n+1,2)}(x_n, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix} \tag{24}$$

и, соответственно, при помощи определённого выше репрезентатора $\langle i|\alpha\rangle = f_{(n+1,2)}(x_i, y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^n)$, построить тождество — верификатор:

$$\langle i_0|\alpha\rangle \begin{pmatrix} \langle i_1|\alpha\rangle \\ \vdots \\ \langle i_n|\alpha\rangle \end{pmatrix}^{-1} = \langle i_0|\beta\rangle \begin{pmatrix} \langle i_1|\beta\rangle \\ \vdots \\ \langle i_n|\beta\rangle \end{pmatrix}^{-1}. \tag{25}$$

Покажем как при помощи (25) можно записать решение для ФС ранга (4, 2) над полем вещественных чисел (или над произвольным полем). Определим мультипликативную группу B_0 как $\mathbb{R}_0$ – мультипликативную группу вещественных чисел без нуля. Унарная операция $\varphi_2(x) = 1 - x$, автоморфизм мультипликативной группы $\sigma_3(x) = x^{-1}$ так, что $\varphi_3(x) = \frac{x-1}{x}$ для которого справедливо тождество $\varphi_2\varphi_3\varphi_2 = \varphi_3\varphi_2\varphi_3$. Расширяя бинарную мультипликативную операцию $0x = 0, \infty x = \infty$ окончательно получим выражение для репрезентатора:

$$f_{(4,2)}(x, y_1, y_2, y_3) = \frac{y_2(y_3 - y_1) + xy_3(y_1 - y_2)}{y_3 - y_1 + x(y_1 - y_2)},$$

для которого справедливо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Запишем теперь классификацию двуметрических ФС ранга $(2, n+1)$ через классификацию алгебраической системы $(\mathbb{R}^2, \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \sigma_i)$, построенной над группами $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$. Группу $\mathbb{G}_1$ запишем в двух локально изоморфных представлениях: $\mathbb{G}_1^{(1)}$ с умножением $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$, и $\mathbb{G}_1^{(2)}$ с умножением $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1 + \varepsilon x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. При $\varepsilon = 1$, таким образом определённое умножение, задаёт умножение двойных чисел, при $\varepsilon = 0$ — это умножение дуальных чисел и при $\varepsilon = -1$ — это умножение комплексных чисел. Первые два примера гиперкомплексных чисел обладают делителями нуля и, потому в глобальном случае не являются группами, хотя локально они группы.

Группа $\mathbb{G}_2$ по–прежнему с умножением $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2)$.

Двуметрические ФС ранга $(2, 3)$ могут быть построены над алгебраическими системами:
1.) $\mathbb{G}_1^{(2)}$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2)$.
2.) $\mathbb{G}_2, \varphi_2(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$,
3.) $\mathbb{G}_2$, $c \in [0; 1)$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (|x_1|^c \frac{|x_1|^{\frac{c}{c-1}} - x_1}{\left(|x_1|^{\frac{c}{c-1}} - x_1\right)^c}, |x_1|^c \frac{x_2}{\left(|x_1|^{\frac{c}{c-1}} - x_1\right)^c})$,
4.) $\mathbb{G}_2$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{x_1 - 1}, \frac{x_2 - \ln|x_1 - 1| + x_1(2 - x_1)\ln|\frac{x_1 - 1}{x_1}|}{(x_1 - 1)^2})$.

В решениях 1 и 2 имеется автоморфизм σ_3, позволяющий построить ФС ранга $(2, 4)$. Решение 1 имеет два независимых решения:
1.a.) $\mathbb{G}_1^{(1)}$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2), \sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2x_1^{-1})$,
1.b.) $\mathbb{G}_1^{(2)}$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, -x_2), \sigma_3(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{x_1^2 - \varepsilon x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 - \varepsilon x_2^2})$,
2.) $\mathbb{G}_2, \varphi_2(x_1, x_2) = (x_2, x_1), \sigma_3(x_1, x_2) = (x_1, 1 - x_1 - x_2)$.

Над группой $\mathbb{G}_1^{(1)}$, за счет существования σ_4, можно построить ФС ранга $(2, 5)$.
1.a.) $\mathbb{G}_1^{(1)}$, $\varphi_2(x_1, x_2) = (1 - x_1, 1 - x_2), \sigma_3(x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2x_1^{-1}), \sigma_4(x_1, x_2) = (x_1x_2^{-1}, x_2^{-1})$.

2.4.4 Физические структуры произвольного ранга

В работе [27] на основе алгебраической аксиоматики ТФС показана эквивалентность ФС понятию обобщённого матричного умножения, в котором, в отличие от обычного матричного умножения, построенного на билинейной функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_r) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ry_r,$$

умножение строится на некоторой специальной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, зависящей от элементов строки первой перемножаемой матрицы и элементов столбца второй матрицы. При этом не обязательно выполнение равенства $m = n$. С обычным матричным умножением их связывает то, что на некотором подмножестве $\mathfrak{S}_{B^{nm}} \subseteq B^{nm}$ такое обобщённое матричное произведение — групповое. Иными словами, среди всех матриц одной размерности можно выделить подмножество матриц, на котором такое произведение будет групповым.

Значительно раньше, в конце 80–х, Кулаковым Ю.И. [28] была предпринята попытка переформулировать ТФС на языке кортов. Кортам $\langle i_1, \ldots, i_n | \in \mathfrak{M}^n$, $|\alpha_1, \ldots, \alpha_m\rangle \in \mathfrak{N}^m$ сопоставлялись матрицы

$$I = \begin{pmatrix} x_1(i_1) & \cdots & x_m(i_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(i_n) & \cdots & x_m(i_n) \end{pmatrix}, \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \xi_1(\alpha_1) & \cdots & \xi_1(\alpha_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n(\alpha_1) & \cdots & \xi_n(\alpha_m) \end{pmatrix}$$

и репрезентатор f^{mn} сопоставлял матрицам–кортам I, $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{mn}$ матрицу из mn репрезентаторов f: $\langle i_1, \ldots i_n | \alpha_1, \ldots, \alpha_m\rangle = \langle I | \mathfrak{A}\rangle$. Верификатор Φ^{nm} состоял из nm верификаторов Φ, записанных в виде:

$$\langle \mathfrak{A} | I\rangle = g(\langle \mathfrak{A} | J\rangle, \langle \mathfrak{B} | J\rangle, \langle \mathfrak{B} | I\rangle), \tag{26}$$

но на момент написания статьи ещё отсутствовало доказательство того, что из данного уравнения для ФС ранга $(2, 2)$ следует групповой закон умножения. Ионин В.К. в 1990 году, независимо от Кулакова Ю.И., записал уравнение (26) и доказал его групповой характер [7].

2.5 Обобщённое матричное умножение

В качестве произведения двух матриц $A = ||a_{ij}||$ и $C = ||c_{jk}||$ будем рассматривать матрицу $D = ||d_{ik}||$, построенную при помощи функции $f : \mathfrak{S}_f \to B$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq B^m \times B^n$. При этом перемножаться могут матрицы размера $n \times m$, где n — число строк, m — число столбцов матрицы. Элемент d_{ij}, стоящий в i – той строке и j – том столбце, есть функция f от m элементов i – той строки матрицы A и n элементов j – того столбца матрицы C:

$$d_{ij} = f(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}, c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{nj}). \tag{27}$$

В матрице $A \in B^{nm}$ для обозначения i – той строки будем писать A_{i*}, а для обозначения j – того столбца будем писать A_{*j}. В этих обозначениях элемент d_{ij} можно записать в виде произведения строки на столбец: $d_{ij} = A_{i*}C_{*j}$. Определим *множество всех строк* $\{A_{i*} | i \in \{1, 2, \ldots, n\}, A \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}\} = \mathfrak{S}_{B^m}$ и *множество всех столбцов* $\{A_{*j} | j \in \{1, 2, \ldots, m\}, A \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}\} = \mathfrak{S}_{B^n}$. Для произвольной матрицы $A \in B^{mn}$ можно рассмотреть матрицы A^i_j и A^{rs}, отличающиеся от исходной только перестановкой двух строк i и j или перестановкой двух столбцов r и s соответственно. Вполне естественно потребовать, что для множеств B и $\mathfrak{S}_{B^{nm}}$ всегда выполняется условие: $(\forall x \in B)(\exists A \in \mathfrak{S}_{B^{nm}})(a_{ij} = x)$. Если это не так, тогда всегда можно перейти к подмножеству $B_x = B \setminus \{x\}$, для которого справедливо $\mathfrak{S}_{B^{nm}} \subseteq B_x^{nm} \subset B^{nm}$.

Потребуем, чтобы в множестве всех матриц размера B^{nm} существовало подмножество матриц $\mathfrak{S}_{B^{nm}}$, для которых данное умножение было групповым. Усиливая данное требование, будем считать, что четверка $(B, (m, n), f, \mathfrak{S}_{B^{nm}})$ задаёт обобщённое матричное умножение, если справедливы аксиомы:

A1. $(\forall A \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}), (\forall D_{*j} \in \mathfrak{S}_{B^n}), (\exists! C_{*j} \in \mathfrak{S}_{B^n}) : AC_{*j} = D_{*j}$;

A2. $(\forall C \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}), (\forall D_{i*} \in \mathfrak{S}_{B^m}), (\exists! A_{i*} \in \mathfrak{S}_{B^m}) : A_{i*}C = D_{i*}$;

A3. $(\forall A, C, D \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}) : (AC)D = A(CD)$;

A4. $(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}) : A \in \mathfrak{S}_{B^{nm}} \Leftrightarrow A^i_j \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}$;

A5. $(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}) : A \in \mathfrak{S}_{B^{nm}} \Leftrightarrow A^{ij} \in \mathfrak{S}_{B^{nm}}$.

Два обобщенных матричных умножения $(B,(m,n),f,\mathfrak{S}_{B^{nm}})$ и $(C,(m,n),g,\ \mathfrak{S}_{C^{nm}})$ естественно считать эквивалентными, если они задают изоморфные матричные группы.

Если определено обобщённое матричное умножение $(B,(n,m),f,\mathfrak{S}_{B^{nm}})$, то над множеством B определена и ФС ранга $(n+1,m+1)$. Действительно, если определить $\mathfrak{M}=\mathfrak{S}_{B^m}$, $\mathfrak{N}=\mathfrak{S}_{B^n}$, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}^{n+1}}=\mathfrak{M}\times\mathfrak{S}_{B^{nm}}$, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}^{m+1}}=\mathfrak{N}\times\mathfrak{S}_{B^{nm}}$, тогда для произвольных $\langle A_{0*},A_{1*},\dots,A_{n*}\rangle\in\mathfrak{M}\times\mathfrak{S}_{B^{mn}}$ и произвольных $\langle C_{*0},C_{*1},\dots,C_{*m}\rangle\in\mathfrak{N}\times\mathfrak{S}_{B^{mn}}$ справедливо тождество

$$A_{0*}C_{*0}=(A_{0*}C)(AC)^{-1}(AC_{*0}). \tag{28}$$

При этом строки A_{i*} составляют матрицу A, а столбцы C_{*j} — матрицу C. Результатом умножения строки на матрицу $A_{0*}C$ будет строка, а результатом умножения матрицы на столбец AC_{*0} будет столбец.

В случае $C=A^{-1}$ тождество (28) превращается в тождество $A_{0*}C_{*0}=(A_{0*}A^{-1})(AC_{*0})$, из которого следует, что функция f является двухточечным инвариантом группы преобразований. Изучению этого вопроса были посвящены ряд работ Г.Г. Михайличенко [3].

Используя алгебраическую аксиоматику и понятие обобщённого матричного умножения Фирдманом И.А. была решена задача по классификации решений ТФС с некоторыми дополнительными ограничениями, над топологическими пространствами [29, 30].

В качестве примера обобщённого матричного умножения с функцией, отличающейся от билинейной, можно рассмотреть второе однометрическое решение (8) ФС ранга $(n+1,n+1)$ с функцией f записанной в виде

$$f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)=\sum_{\mu=1}^{n-1}(x_\mu-x_n)(y_\mu-y_n)+x_n+y_n. \tag{29}$$

ФС ранга $(n,n+1)$ получается из записанного выше решения, если положить $y_n=0$.

Матричную группу с умножением, построенным при помощи функции (29) можно записать [31] и при помощи обычного матричного умножения, но построенную над матрицами:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1(n-1)} & x_{1n} & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_{(n-1)1} & \cdots & x_{(n-1)(n-1)} & x_{(n-1)n} & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ x_{n1} & \cdots & x_{n(n-1)} & x_{nn} & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим ещё, что любая ФС ранга $(m+1,n+1)$ над множеством B, задаваемая соответствующим обобщённым матричным умножением, представима как ФС ранга $(m+1,2)$ или $(2,n+1)$ над множеством B^n или B^m соответственно.

3 Геометрии как физические структуры

3.1 Плоские геометрии

Михайличенко Г.Г. в монографии [32] привёл полную классификацию двумерных феноменологически симметричных геометрий, краткое определение которых следующее.

Существует гладкое многообразие $\mathfrak{N}$, открытое и плотное подмногообразие $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}\subseteq\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}$. Также существует достаточно гладкая невырожденная функция $f:\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}\to\mathbb{R}$, которую будем называть метрической функцией, гладкая функция шести переменных $\Phi:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}$, $\operatorname{grad}\Phi\neq0$. Если для любого кортежа из четырех произвольных точек $\langle xyzu\rangle$, каждая пара которого принадлежит множеству $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ имеет место функциональная связь:

$$\Phi(f(xy),f(xz),f(xu),f(yz),f(yu),f(zu))=0,$$

тогда метрическая функция f на многообразии $\mathfrak{N}$ будет задавать двумерную феноменологически симметричную геометрию.

Этому определению удовлетворяют некоторые известные, а также и неизвестные геометрии. Метрические функции этих геометрий в специальной системе локальных координат принимают следующий вид для:

1. Плоскости Евклида: $f(xy) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$, где, например, x_1, x_2 – координаты точки x, а множество $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ состоит из произвольных пар точек плоскости;

2. Плоскости Минковского: $f(xy) = (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$;

3. Геометрии Римана: $f(xy) = \cos x_2 \cos y_2 \cos(x_1 - y_1) + \sin x_2 \sin y_2$;

4. Геометрии Лобачевского: $f(xy) = \sinh x_2 \sinh y_2 \cos(x_1 - y_1) - \cosh x_2 \cosh y_2$;

5. Гиперболической геометрии: $f(xy) = \cosh x_2 \cosh y_2 \cos(x_1 - y_1) - \sinh x_2 \sinh y_2$;

6. Симплектической плоскости: $f(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1$;

7. Плоскости Гельмгольца: $f(xy) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2] \exp\left(\gamma \mathrm{arctg} \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right)$, где постоянная $\gamma > 0$, причем функция arctg рассматривается однозначной с областью значений в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$. Множество $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ состоит из пар точек $\langle xy \rangle$, первые координаты которых различны. Термин "Плоскость Гельмгольца" появилась из анализа работы Гельмгольца [33] "*О фактах, лежащих в основании геометрии*", где он предлагал изучать геометрию, в которой роль окружности выполняет логарифмическая спираль;

8. Псевдогельмгольцевой плоскости:

$$f(xy) = [(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2] \exp\left(\beta \mathrm{Arc(c)th} \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right),$$

где постоянная $\beta > 0$ и $\beta \neq 2$, причем выбирается функция Arth, если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция Arcth, если аргумент по величине больше единицы, множество $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ состоит из пар точек $\langle xy \rangle$, координаты которых, с одной стороны, не удовлетворяют условиям: $x_1 - y_1 = \pm(x_2 - y_2)$, а с другой стороны, $x_1 \neq y_1$;

9. Дуальногельмгольцевой плоскости: $f(xy) = (x_1 - y_1)^2 \exp\left(\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right)$, причем множество $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ состоит из пар точек $\langle xy \rangle$ с различными первыми координатами;

10. Симплициальной плоскости: $f(xy) = \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}$,где область определения $\mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ этой метрической функции состоит так же из пар точек $\langle xy \rangle$ с различными первыми координатами.

Пусть H — группа диффеоморфизмов феноменологически симметричной плоскости. Преобразование $h : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ называется движением, если оно оставляет метрическую функцию f инвариантной, т.е. для $\langle xy \rangle \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ и $\langle h(x)h(y) \rangle \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}}$ справедливо $f(h(x), h(y)) = f(x, y)$. Михайличенко Г.Г. [32] показал, что по метрической функции f находится трехпараметрическая группа движений H, а по этой группе движений, с точностью до гладкой функции $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, восстанавливается метрическая функция f .

Последнее утверждение сильно сближает геометрии на одном множестве с геометриями на двух множествах (ФС на двух множествах), т.к. для них так же по группе преобразований, сохраняющей репрезентатор, можно получить сами репрезентаторы. Это проявляется и в том, что сами метрические функции геометрий на одном множестве можно получить из геометрий на двух множествах. Действительно, если произвести отображение $\mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, тогда вместо корта $\langle ijkl|\alpha\beta\gamma\delta \rangle$ можно будет рассматривать корт $\langle ijkl|ijkl \rangle$. В этом случае, первые два решения — плоскости Евклида и Минковского можно получить из репрезентатора (8) ФС ранга $(4, 4)$ при дополнительном условии $f(i, j) = f(j, i)$ и $f(i, i) = 0$.

Решения для геометрий Римана, Лобачевского и гиперболической получаются из репрезентатора (7) ФС ранга $(4, 4)$ при дополнительном условии $f(i, j) = f(j, i)$ и $f(i, i) = 1$.

Метрическая функция симплектической плоскости получается из репрезентатора (7) ФС ранга $(3, 3)$ при дополнительном условии $f(i, j) = -f(j, i)$.

Оставшиеся четыре геометрии связаны с триметрическими ФС ранга (2,2) — G_μ (см. раздел 2.4.1 на стр. 10). При надлежащем выборе изотопических преобразований $\chi, \psi, \lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ трёхмерных групп G_μ одна из трёх компонент функции

$$f' = (f'_1, f'_2, f'_3) = \chi\left(G_\mu\left(\psi(x_1, x_2, x_3), \lambda(y_1, y_2, y_3)\right)\right)$$

будет совпадать с метрической функцией плоской геометрии [32]. В частности, плоскость Гельмгольца получается из группы G_5, псевдогельмгольцева из G_4 при $0 < p^2 < 1$, дуальногельмгольцева из G_3, симплициальная из G_4 при $p = 1$.

3.2 Трёхмерные геометрии

Аналогичная задача, классификации трёхмерных геометрий, была решена Львом ВладимиромХанановичем [5, 6]. Метрические функции этих геометрий в специальной системе локальных координат принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}
f(xy) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2; \\
f(xy) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2; \\
f(xy) = \sin x_3 \sin y_3 \left(\sin x_2 \sin y_2 \cos(x_1 - y_1) + \cos x_2 \cos y_2\right) + \cos x_3 \cos y_3; \\
f(xy) = \cosh x_3 \cosh y_3 \left(\sin x_2 \sin y_2 \cos(x_1 - y_1) + \cos x_2 \cos y_2\right) - \sinh x_3 \sinh y_3; \\
f(xy) = \sinh x_3 \sinh y_3 \left(\sin x_2 \sin y_2 \cos(x_1 - y_1) + \cos x_2 \cos y_2\right) - \cosh x_3 \cosh y_3; \\
f(xy) = \cosh x_3 \cosh y_3 \left(\cosh x_2 \cosh y_2 \cos(x_1 - y_1) - \sinh x_2 \sinh y_2\right) - \sinh x_3 \sinh y_3; \\
f(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 - y_3; \qquad (30) \\
f(xy) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right] \exp\left(\gamma \mathrm{arctg}\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} + x_3 + y_3\right); \\
f(xy) = \left[(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2\right] \exp\left(\beta \mathrm{Arc(c)th}\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} + x_3 + y_3\right); \\
f(xy) = (x_1 - y_1)^2 \exp\left(\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} + x_3 + y_3\right); \\
f(xy) = \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} \exp\left(x_3 + y_3\right);
\end{gathered}$$

где, $\gamma \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\beta \neq 2$.

Аналогично плоским геометриям, первые две трёхмерные геометрии можно получить из репрезентатора ФС (8) ранга $(5,5)$ при дополнительном условии $f(i,j) = f(j,i)$ и $f(i,i) = 0$. Ещё четыре геометрии, аналогично, получаются из репрезентатора (7) ФС ранга $(5,5)$ при дополнительном условии $f(i,j) = f(j,i)$ и $f(i,i) = 1$.

Известно, что симлектическая геометрия может быть только для четных размерностей, в данном случае, получающаяся метрическая функция (30) близка к симплектической, но определена для нечётной размерности и получается из репрезентатора (8) ФС ранга $(4,4)$ при дополнительном условии $f(i,j) = -f(j,i)$.

Оставшиеся четыре геометрии связаны с четыреметрическими ФС ранга (2,2). Аналогично трёхмерному случаю, при надлежащем выборе изотопических преобразований четырёхмерных групп одна из четырёх компонент функции $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$ будет совпадать с метрической функцией трёхмерной геометрии [17].

Казалось бы, аналогично полученному ранее репрезентатору (30), из репрезентатора (7) ФС ранга $(4,4)$, при том же дополнительном условии $f(i,j) = -f(j,i)$, можно получить так же метрическую функцию антисимметричной геометрии

$$f(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + a\left(x_2 y_3 - x_3 y_2\right) + b\left(x_3 y_1 - x_1 y_3\right).$$

Но заменой переменных $x'_1 = x_1 - ax_3, x'_2 = x_2 - bx_3, x'_3 = x_3$ можно устранить зависимость от трёх переменных и свести её к зависимости от двух переменных, т.е. $f(xy) = f(x'y') = x'_1y'_2 - x'_2y'_1$, т.о. данная геометрия будет вырожденной. В общем случае было показано [34], что из требования существования связи $f(xy) = \lambda(f(yx))$ для бинарных ФС на двух множествах следует наличие только симметричной и антисимметричной геометрии. Антисимметричные геометрии возможны двух типов, но для разных размерностей:

$$f_{ij} = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}x_i^{\mu}x_j^{\nu}, \text{ при } n = 2; 4; \ldots,$$

$$f_{ij} = \sum_{\mu=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1} b_{\mu\nu}x_i^{\mu}x_j^{\nu} + x_i^n - x_j^n, \text{ при } n = 3; 5; \ldots, \tag{31}$$

коэффициент $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$.

3.3 Геометрии на абстрактных множествах

На абстрактных множествах данная задача рассматривалась только для простейшего случая — ФС ранга 3, на одном множестве [8]. Вполне естественно, что в данном случае имеется только одно решение и оно групповое, так что $f(xy) = xy^{-1}$.

4 Заключение

В заключении к сожалению приходится отметить, что часть важных вопросов всё же осталась вне обзора. Безусловно, важным рездультатом в ТФС является вывод о важности именно бинарных отношений, буть то отношения между двумя множествами или отношения, построенные на двух точках. Дествительно, делались попытки поиска тернарных (и большей арности) физических структур. Можно привести пример тернарного решения ФС ранга (2,2,2), построенного на трёх множествах [35] или тернарных ФС ранга 4 на одном множестве, репрезентатор которого является ориентированной площадью, построенной на трёх точках. Но, возможно, отсутствие большого количества интересных задач и, как следствие, разнообразных решений для тернарных (и большей арности) ФС связано с отсутствием у неё групповой симметрии, т.е. остутствием группы движений сохраняющую инвариантным вид репрезентатора [3].

Остались за кадром новые исследования, связанные с построениями над минимальными нетривиальными множествами, состоящими из двух точек. Из данных множеств, при помощи естественных построений, можно получить, как все логические операции, так и операции теории множеств. Более того, дальнейшее расширение приводит к естественному построению генетики [36].

Совершенно неоправданным было бы упустить важнейшую связь с Бинарной Геометрофизикой [37, 38], развиваемой Владимировым Ю.С., в которой автор, используя решения ФС ранга (n, n) (7) и (8) над комплексными числами, строит модель электрослабых, сильных, гравитационных взаимодействий и их объединение.

ТФС позволяет иначе взглянуть на многие обычные вещи, изучаемые со школы и младших курсов вузов. Возможно, что алгебраические системы возникающие в рамках ТФС помогут посмотреть на некоторые проблемы в физике совершенно под другим углом. Несмотря на то, что алгебраическая система правой почтиобласти близка к полю вещественных или комплексных чисел, но в ней нет неопределённостей умножения или деления на ноль и бесконечность. Действительно, в правой почтиобласти справедливы тождества: $\infty \cdot 0 = \infty, 0 \cdot \infty = 0, \infty \cdot \infty = 1, 0 \cdot 0 = 1$.

Если трёхмерное пространство, в котором мы живём построено не над полем вещественных чисел, а над правой почтиобластью, тогда отсутствие одной из дистрибутивностей как раз и приводит к различию правого и левого. К нарушению пространственной чётности. Возможно, такое различие начинает играть свою роль только на очень малых размерах. С другой стороны, в почтиобласти появляется мультипликативная добавка, исправляющая нарушение ассоциативности, которая напоминает появление компенсирующего члена при параллельных переносах векторов.

Неожиданно появляется метрика симплектической геометрии в двуметрическом решении 4 ФС ранга (3,2), более того за счет специального выбора левой обратной в аддитивной операции антисимметричная метрика превращается в симметричную. Появление симплектических геометрий нечётных размерностей (31) так же повод их более детального изучения.

Представление обычных геометрий в виде геометрий на двух множествах позволяет более естественно ввести понятие *ко* и *контра*, когда один и тот же объект описывается с точки зрения разных множеств, так и вскрыть их новые свойства.

Список литературы

[1] Кулаков Ю.И. *Теория физических структур.* Москва, 2004, с. 847.

[2] Кулаков Ю.И. *Элементы теории физических структур* (дополнение Михайличенко Г.Г). Новосибирск, Изд–во НГУ, 1968, с. 226.

[3] Михайличенко Г.Г. *Групповая симметрия физических структур.* Барнаул: БГПУ, 2003, с. 204.

[4] Кыров В.А. *Циклы некоторых плоскостей феноменологически симметричных геометрий.* Наука, культура, образование. №3, 1999, с. 126–128.

[5] Лев В.Х. *Трёхмерные и четырёхмерные пространства в теории физических структур.* Автореферат канд. диссертации. – Минск, 1990, с. 10.

[6] Лев В.Х. *Трехмерные геометрии в теории физических структур.* Вычислительные системы, 125, Новосибирск 1988г., с. 90–104.

[7] Ионин В.К. *Абстрактные группы как физические структуры.* Системология и методологические проблемы информационно–логических систем. Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы. с. 40–43.

[8] Симонов А.А. *Групповые решения функциональных уравнений физической структуры.* Математические заметки ЯГУ, Якутск 1998, Том 5, вып. 2, с. 52–58.

[9] Бородин А.Н. *Груда и группа как физическая структура.* Приложение 1. в монографии Г.Г. Михайличенко Групповая симметрия физических структур. Барнаул: БГПУ, 2003, с. 195–203.

[10] Симонов А.А. *О соответствии между почтиобластями и группами.* Алгебра и Логика. 2006, 45, 2.

[11] Михайличенко Г.Г. *Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физ. структур).* ДАН СССР, 1985, т. 284, № 1, стр. 39–41.

[12] Кулаков Ю.И. *Об одном принципе, лежащем в основании классической физики.* ДАН СССР, 1970, т. 193, №1, стр. 72–75.

[13] Михайличенко Г.Г. *Решение функциональных уравнений в теории физических структур.* ДАН СССР, 1972, т. 206, №5, с. 1056–1058.

[14] Михайличенко Г.Г. *Математический аппарат теории физических структур.* Горно–Алтайск: Универ–Принт ГАГУ, 1997, с. 154.

[15] Михайличенко Г.Г. *Двуметрические физические структуры и комплексные числа.* ДАН 1991, том 321, №4, с. 677–680.

[16] Михайличенко Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии.* ДАН 1996, том 348, №1, с. 22–24.

[17] Кыров В.А. *Классификация четырехмерных транзитивных локальных групп Ли преобразований пространства R^4 и их двухточечных инвариантов.* Известия вузов. Математика. 2008, №6, с. 29–42.

[18] Михайличенко Г.Г., Лозицкий Е.Л. *Простейшие двуметрические физические структуры*, Методологические и технологические проблемы информационно–логических систем (вычислительные системы, 125), Новосибирск, 1988, с. 88–89.

[19] Кыров В.А. *Феноменологически симметричные локальные группы Ли преобразований пространства* $\mathbb{R}^s$. Изв. вузов. Матем., 2009, №7, 10–21.

[20] Михайличенко Г.Г. , Мурадов Р.М. *Гиперкомплексные числа в теории физических структур*, Известия вузов. Математика. 2008, №10, с. 25–30.

[21] Михайличенко Г.Г. , Мурадов Р.М. *Физические структуры как геометрии двух множеств.* С приложениями В.А Кырова и А.Н. Бородина. Горно–Алтайск. Изд–во ГАГУ, 2008, с. 156.

[22] Витяев Е.Е. *Числовое, алгебраическое и конструктивное представления одной физической структуры.* Логико-математические основы проблемы МОЗ. Новосибирск, 1985. Вып. 107: Вычислительные системы. с. 40–51.

[23] Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A., *Foundations of measurement. V.1* – New York and London: Academic Press, 1971, p.576

[24] Мурадов Р.М., Кырова В.А. *О квазигруппах, возникающих из физической структуры ранга (2, 2).* Прикладная дискретная математика, 2008, №2, 12–14.

[25] Литвинцев А.А. *Комплексная физическая структура ранга (2,2).* Приложение 1 в монографии Г.Г. Михайличенко Математический аппарат физических структур, 1997 г., с. 147-159.

[26] Симонов А.А. *О соответствии правых почтиобластей точно дважды транзитивным группам.* Тезисы "Мальцевские чтения 2009, Новосибирск. с. 239–251

[27] Симонов А.А. *Обобщённое матричное умножение как эквивалентное представление Теории физических структур.* Приложение 2. в монографии Ю.И. Кулакова Теория физических структур. Москва, 2004, с. 673–707.

[28] Кулаков Ю.И. *Новая формулировка теории физических структур*, Методологические и технологические проблемы информационно–логических систем, Вычислительные системы, №125, 1988, с. 3–32.

[29] Фирдман И.А. *Алгебраическая классификация физических структур с нулём. I.* Сиб. журнал индустриальной математики. 2005, т. 8, №4 (24), с. 131–148.

[30] Фирдман И.А. *Алгебраическая классификация физических структур с нулём. II. Топологические аспекты.* Сиб. журнал индустриальной математики. 2006, т. 9, №1 (25), с. 135–146.

[31] Бардаков В.Г. Симонов А.А. *Об одной матричной группе.* 2010, http://www.tphs.info/lib/exe/fetch.php/wiki:autor:simonov:matrixm.pdf.

[32] Михайличенко Г.Г. *Полиметрические геометрии.* Новосибирск, 2001, с. 143.

[33] Гельмгольц Г. *О фактах, лежащих в основании геометрии.* Об основаниях геометрии. М., 1956, с. 366–388.

[34] Михайличенко Г.Г. *Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства (в рамках теории физических структур).* Изв. вузов. Матем., 1991, № 6, с. 28–35.

[35] Михайличенко Г.Г. *Тернарная физическая структура ранга (2,2,2).* Изв. вузов. Матем., 1976, № 8(171), с. 60–67.

[36] Петухов С.В. *Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость*, Москва, изд. Регулярная и хаотическая динамика, М., 2008, с. 316.

[37] Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. *Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику.* М.: Изд–во «Архимед», 1992, с. 184.

[38] Владимиров Ю.С. *Геометрофизика.* М.: Изд–во БИНОМ (Лаборатория знаний), 2005, с. 600.