

ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

(Статья из цикла понимание физики)

А.Каминский

Цель этой статьи — дать читателю некоторый, не лишенный авторской предвзятости, обзор основных идей, лежащих в основе современного понимания природы электромагнетизма

Введение

Принятая сегодня в теоретической физике парадигма предполагает существование двух видов материи – частиц и полей, переносящих взаимодействия. Частицы материи всегда являются фермионами, тогда, как кванты полей взаимодействия – бозонами. Известны 4 типа взаимодействий – гравитационное, слабое, электромагнитное и сильное. 3 из них, как известно, удовлетворительно описываются стандартной моделью, построенной на основе очень красивой и плодотворной идеи калибровочных симметрий. Эта идея в современном виде впервые появилась в работах Германа Вейля и Владимира Фока, но широкое признание получила после того, как на нее обратил внимание Вольфганг Паули. Настоящего триумфа теория калибровочных полей достигла в 60-х годах прошлого века, когда С. Вайнбергом, Ш. Глэшоу и А. Саламом была построена единая теория слабого и электромагнитного взаимодействий. Все это хорошо известно и доступно в соответствующей литературе. Поэтому, мы не станем в очередной раз излагать основы хорошо развитого формализма калибровочных теорий, а обратим внимание на физическую сторону вопроса. Рассмотрение электромагнетизма, как наиболее простого примера калибровочной теории, несколько не снизив уровень понимания общей картины, позволит нам обойтись более наглядной и простой математикой. Взяв за основу идеи Калуцы и Клейна [1], мы откроем заинтересованному читателю некоторые ускользающие от внимания и, не всегда легко распознаваемые за математическим формализмом, физические образы.

Действие

Принцип наименьшего действия часто представляется в мистическом ореоле. Действительно, создается ощущение, что частица «знает» заранее по какой траектории ей двигаться. Но это следствие упрощенного описания движения классической механикой. В классической физике действие пропорционально пути вдоль мировой линии частицы (очевидно это инвариант). В КМ действие вошло в качестве фазы в ВФ $e^{iS(x_i)}$ и таинственное требование минимума функционала обернулось более глубоким пониманием. Фейнман объяснил, что действие на самом

деле это фаза, которая набегает при движении вдоль некоторого пути. Поэтому, когда мы суммируем фазу вдоль всевозможных путей, то сохраняются только те из них, которые проинтерферировали конструктивно. Таким образом, если в классической механике вариационный метод являлся чисто математическим приемом, то в теории поля он получил некоторое осмысление. Здесь истинная траектория частицы вычисляется «квантовым компьютером» самой природы и не методом вариационного исчисления, а методом Фейнмановских интегралов по путям! Этот механизм легко объясняет переход от квантового описания движения к классическому, перенося мистическую компоненту принципа на саму квантовую механику, «магия» которой давно уже ни кого не удивляет. Мы покажем, что феноменологическое представление Фейнмана имеет в своей основе еще более элементарную основу.

Почти не вызывает сомнения то, что принцип наименьшего действия является следствием движения частицы по геодезической многообразия неких скрытых (внутренних) степеней свободы. Частица, вследствие симметрии не может уклониться от единственной безальтернативной возможности движения по прямой. В противном случае, нужно было бы предположить свободу воли у частицы. Таким образом, принцип наименьшего действия есть следствие принципа симметрии. Как впервые отметил Ю.Б.Румер [2], идея скрытого дополнительного измерения большей размерности при соответствующей топологии последнего может быть использована для обоснования квантовой механики. Действительно, компактифицированные пространства типа Калуцы - Клейна навязывают необходимость использования периодических граничных условий для описания движения, что автоматически объясняет наличие фазы, связанной с квантовой частицей (Фейнман для наглядности, говорил о вращении некоей стрелки, связанной с частицей). Румер писал «Этот путь ведет к обнаружению возможности приписать пятой координате x_5 физический смысл действия, ее периоду численную величину постоянной Планка и приводит к глубокому синтезу геометрических идей, заложенных в общей теории относительности, с идеями квантовой теории». Эта красивая идея ввиду ряда причин, пока, не нашла дальнейшего развития. Тем не менее, мы воспользуемся ею чтобы показать, как на этой основе может быть построена электродинамика.

Калибровочные преобразования

Рассмотрим комплексное скалярное поле $\psi(x^\mu, \theta)$. Здесь x^μ - координаты в пространстве-времени Минковского ($\mu = 0,1,2,3$) и θ – фаза. Переходя к наглядным образам, представим эту функцию траекторией в пространстве расслоения фаз над базой, представляющей собой пространство – время Минковского. Слоем при этом является единичная окружность на комплексной плоскости. Функцию $\psi(x^\mu, \theta)$ – можно рассматривать, как плотность точек, движущихся по геодезическим [3] многообразия $R^3 \otimes S^1$. Эта не совсем традиционная интерпретация скалярного поля не повлияет на следующие математические выкладки, но понадобится нам в дальнейшем. Очевидно, что функция, полученная преобразованием $\psi(x^\mu) \rightarrow \psi(x^\mu)e^{-i\varphi}$ так же будет решением однородных дифференциальных уравнений. Такое преобразование называют глобальным калибровочным. Оно соответствует параллельному подъему всей траектории в пространстве расслоения. Следуя

идеологии ОТО, где переход от линейных преобразований к наиболее общим преобразованиям координат приводит к возникновению «компенсирующих» полей инерции, мы так же рассмотрим нелокальные калибровочные преобразования [4,5]:

$$\psi(x^\mu) \rightarrow \psi(x^\mu)e^{-i\varphi(x^\mu)} \quad (1)$$

Рассмотрим, как ведут себя дифференциалы при таком преобразовании. Очевидно:

$$d\psi' = d\psi + i\psi d\varphi \quad (2)$$

Добавочный член $i\psi d\varphi$, возникающий при дифференцировании сложной функции делает дифференциальные уравнения движения не инвариантными относительно таких преобразований. Но так же, как и в ОТО, проблема легко решается введением ковариантного дифференцирования:

$$D\psi' = d\psi - i\psi A_\mu dx^\mu \quad (3)$$

A_μ – здесь аналог коэффициентов аффинной связности. Они возникают, как компенсирующие калибровочные поля. В нашем случае A_μ – 4-х потенциал электромагнитного поля. Член $A_\mu dx^\mu$ – описывает добавочный поворот фазы, обусловленный отличной от нуля «связностью» пространства расслоения.

Подбором компенсирующих полей A_μ всегда можно добиться чтобы:

$$D\psi' = d\psi + \cancel{i\psi d\varphi} - \cancel{i\psi A_\mu dx^\mu} = d\psi \quad (4)$$

Для того чтобы построить полную геометрическую картину явления, заменим комплексную функцию ψ двухкомпонентным вектором столбцом в комплексной плоскости расслоения. Это значит, что для каждого x^μ , A_μ – действует, как 2×2 матрица поворота в пространстве внутренней симметрии. Формально, справедливость такого подхода не вызывает сомнений, однако остается не до конца понятно, какому многообразию соответствует описанная структура расслоения. По сути дела, вводится некое поле сдвигов фаз, но нам не объясняют не механизм сдвига фазы, не что такое сама фаза скалярного поля... Именно поэтому, называя A_μ связностью, мы заключили это слово в кавычки.

Геометрия калибровочных полей

Начнем с простого геометрического примера. Рассмотрим 2D поверхность вращения с метрикой:

$$ds^2 = \sum dx_i^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 .$$

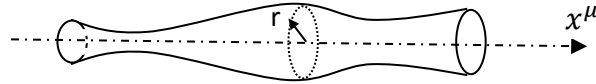


Рис.1

Для одномерного случая, изображенного на рис.1 имеем:

$$ds^2 = (1 + f'^2)dx^2 + f^2 d\theta^2 \quad (6)$$

Далее мы вычислим символы Кристоффеля [6]:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{dg_{\beta\mu}}{dx^\nu} + \frac{dg_{\beta\nu}}{dx^\mu} - \frac{dg_{\mu\nu}}{dx^\beta} \right) \quad (7)$$

получим:

$$\Gamma_{xx}^x = \frac{f'f''}{1+f'^2}; \quad \Gamma_{x\theta}^x = \Gamma_{\theta x}^x = 0; \quad \Gamma_{xx}^\theta = 0; \quad \Gamma_{\theta x}^\theta = \Gamma_{x\theta}^\theta = \frac{f'}{f}; \quad \Gamma_{\theta\theta}^x = \frac{ff'}{1+f'^2}; \quad \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0; \quad (8)$$

Зная символы Кристоффеля, можно вычислить, как меняется вектор при параллельном переносе вдоль геодезической, определяемой, как известно уравнением:

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial s^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \quad (9)$$

Условно, можно говорить о движении точки по геодезической. Решение этой системы уравнений для простейшего случая конусообразной поверхности приведено на рис 3.

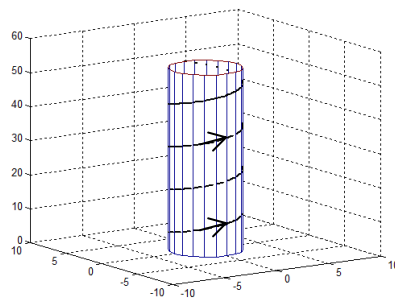


Рис.2

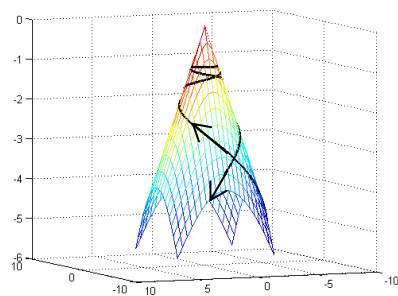


Рис.3

Фаза (количество витков), зависит от угловой скорости намотки геодезической на поверхность вращения. Если скорость движения точки по геодезической постоянна, то скорость набег фазы может меняться только по одной причине – от изменения радиуса кривизны r поверхности вращения (рис.1). Чем радиус меньше, тем больше угловая скорость. Например, в отличие от цилиндрической геометрии, с равномерно навинчивающейся геодезической (рис.2), в случае конуса (рис.3), вектор скорости постепенно поворачивается и в какой-то момент меняет направление. По сути дела,

геодезическая «отталкивается» от вершины конуса. Последнее выглядит, как действие некоей силы, обусловленной полем $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$. Теперь представьте, что компактное измерение θ такого пространства по какой либо причине не наблюдаемо (По предложению Клейна оно может быть очень мало), тогда, с точки зрения макроскопического наблюдателя, не способного наблюдать реальную динамику в скрытом измерении, все выглядит так, как действие некоего эффективного поля в пространстве x^μ . Посмотрим как далеко распространяется эта аналогия.

Движение заряженной частицы

Запишем уравнение геодезической для 4-х мерного многообразия с метрикой¹:

$$G_{ik} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 4} \\ g_{4\mu} & g_{44} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Здесь $g_{\mu\nu}$ – пространственный 3x3 метрический тензор. Будем считать $G_{44} = 1$. Заменим в (3) комплексное поле $\psi(x^\alpha) \in \mathbb{C}$, действительным полем скоростей $c^i \in \mathbb{R}$ на многообразии $\mathbb{R}^3 \otimes S^1$:

$$Dc^j = dc^j - \Gamma_{ik}^j c^i dx^k \quad (11)$$

Здесь Γ_{ik}^j – обычные символы Кристоффеля на рассматриваемом многообразии. Уравнение геодезической примет вид:

$$\frac{dc^j}{dt} = -\Gamma_{ik}^j c^i c^k \quad (12)$$

Распишем его по компонентам, выделив скрытую 4-ю компоненту:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dc^\alpha}{dt} = -\cancel{\Gamma_{\mu\nu}^\alpha} c^\mu c^\nu + 2\Gamma_{\mu 4}^\alpha c^\mu c^4 + \cancel{\Gamma_{44}^\alpha} c^4 c^4 \\ \frac{dc^4}{dt} = -\Gamma_{\mu\nu}^4 c^\mu c^\nu + 2\cancel{\Gamma_{\mu 4}^4} c^\mu c^4 + \cancel{\Gamma_{44}^4} c^4 c^4 \end{array} \right. \quad (13)$$

Доказательство равенства нулю $\Gamma_{\mu 4}^4$, Γ_{44}^α , Γ_{44}^4 смотрите в приложении в конце статьи. Мы рассматриваем случай слабых гравитационных полей, поэтому $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \rightarrow 0$, $g_{\nu\alpha} \rightarrow \delta_{\nu\alpha}$. То есть, в первом уравнении у нас остался второй член, а в во втором – первый. Учитывая, что $\Gamma_{\mu 4}^\alpha = \Gamma_{\mu 4, \alpha}$ и $\Gamma_{\mu\nu, 4} = \Gamma_{\mu\nu}^4$ (смотрите приложение), получим:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu 4}^\alpha = \Gamma_{\mu 4, \alpha} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{4\alpha}}{\partial x^\mu} + \cancel{\frac{\partial G_{\alpha\mu}}{\partial x^4}} - \frac{\partial G_{\mu 4}}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{1}{2} (A_{\alpha, \mu} - A_{\mu, \alpha}) = \mathcal{H}_{\alpha\mu} \\ \Gamma_{\mu\nu}^4 = \Gamma_{\mu\nu, 4} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{\nu 4}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial G_{\mu 4}}{\partial x^\nu} - \cancel{\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x^4}} \right) = \frac{1}{2} (A_{\nu, \mu} + A_{\mu, \nu}) = \mathcal{F}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (14)$$

В аргіогі релятивистских 5-мерных теориях с подпространством Минковского, тензор

¹ Обратите внимание, что мы работаем с 4-х мерной метрикой в отличие от Калуцевской 5-мерной.

$A_{\alpha,\mu} - A_{\mu,\alpha} = F_{\alpha\mu}$ – является обычным тензором электромагнитного поля, а поля $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ – относят к побочному продукту теории. В нашем же случае электрические поля, возникающие, как градиент скалярного электрического поля (временная компонента 4-х потенциала) отсутствуют, и мы имеем только 3x3 магнитный тензор, который мы обозначили $\mathcal{H}_{\alpha\mu}$. С другой стороны, теперь оказываются востребованы поля $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, дающие электрическое поле через векторный потенциал! Итак, в отличие от одного 4x4 тензора электромагнитного поля, в нашем случае, электромагнитное поле описывается двумя 3x3 тензорами, образованными симметричной и антисимметричной комбинациями производных векторного потенциала: $\{\mathcal{H}_{\mu\nu}; \mathcal{F}_{\mu\nu}\}$.

Поле $E_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ никак не действует ни на покоящийся, ни на движущийся заряды. Однако, диагональные компоненты $E_{\nu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\nu}$ действуют на заряд, как градиент обычного скалярного электрического поля. Напомним, что в отличие от классического подхода, у нас нет скалярного потенциала φ и производных от него полей. Однако, как легко видеть, их заменяет поле: $E_{\nu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\nu}$.

То, что это поле, действительно, заменяет градиент скалярного потенциала, можно видеть еще и из того факта, что обычно, на потенциалы накладывают калибровку Лоренца: $\frac{\partial A_i}{\partial x^i} = 0$. То есть: $\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. Или $\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\nu} + v\nabla\varphi = 0$; То есть, поле $E_{\nu\nu}$ действует, как обычное электрическое поле.

Теперь легко представить, как устроено пространство между пластинами заряженного конденсатора (рис.4):

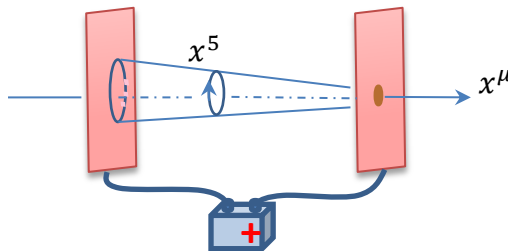


Рис.4

Очевидно, это конус, угол при вершине которого, определяет кривизну в $R^3 \otimes S^1$, которая проявляется, как напряженность электрического поля. Движение заряда в однородном поле означает равномерное изменение шага намотки соответствующей ему траектории, что в свою очередь приводит к равноускоренному движению заряда $e\mathbf{E} = m\mathbf{a}$.

Покажем, как это работает на примере движения заряда в однородном электрическом поле. Для этого, решим задачу движения точки по поверхности вращения. В общем случае, мы должны были бы решать систему дифференциальных уравнений (14) для геодезических. Однако, строгое решение для простейшего случая одномерного движения в однородном поле, можно получить из следующего очень наглядного геометрического построения. На рис.5 приведена развертка конической поверхности.

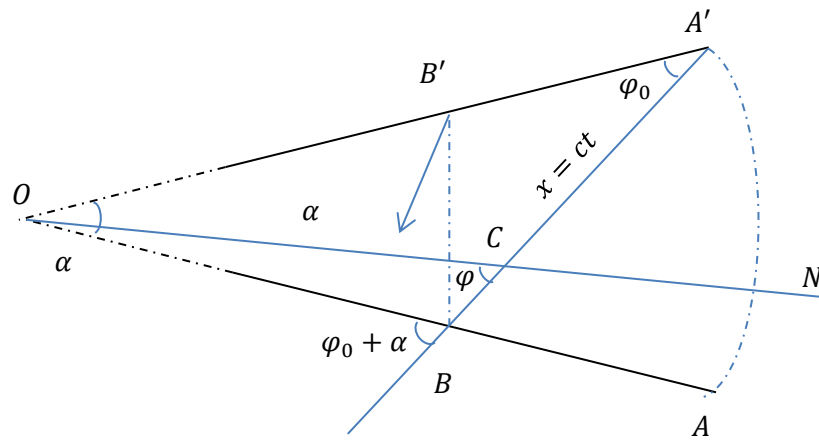


Рис.5

Точки A и A', B и B' отождествлены. Точка C движется по траектории A' B B' Со скоростью света c. За полный оборот вокруг конуса вектор поворачивается на угол α , равный плоскому углу в вершине конуса. Как уже отмечалось, это связано с неголономностью операции переноса вектора на Римановых многообразиях. Предположим, что на рассматриваемом $\mathbb{R}^3 \otimes S^1$ многообразии движутся некие объекты и скорость их движения всегда равна скорости света. Для нас сейчас не важно, что именно там движется, поэтому, условно мы будем говорить о движении точек. Строго говоря, мы имеем право говорить о частицах или других физических объектах, только после редукции к наблюдаемому пространству \mathbb{R}^3 . Тогда проекция скорости движения точки на образующую ON будет равна $v = c \cdot \cos\varphi$. Эта скорость равна групповой скорости частицы. Решая треугольник OCA, получим:

$$\cos\varphi = \frac{R\cos\varphi_0 - ct}{\sqrt{R^2 + c^2t^2 - 2Rct\cos\varphi_0}} \quad (15)$$

Здесь через R обозначили отрезок OA'. Для простоты будем считать, что начальная скорость была равна нулю. То есть, $\cos\varphi_0 = 0$. Учитывая малость угла α (см. ниже), запишем $R = s/\alpha$, где s – периметр сечения конической поверхности. Тогда скорость меняется по закону:

$$v = \frac{-c^2t}{\sqrt{s^2/\alpha^2 + c^2t^2}} \quad (16)$$

Отождествляя: $\frac{s}{\alpha} = \frac{mc^2}{eE}$, получим точное релятивистское выражение для движения заряда в электрическом поле [7]:

$$v = \frac{-c^2eEt}{\sqrt{m^2c^4 + ceEt^2}} \quad (17)$$

Очевидно, отношение периметра компактифицированного пространства к углу при вершине характеризует компоненту связности Γ_{xx}^4 , которая определяется отношением заряда к массе e/m и напряженностью поля E.

$$\Gamma_{xx}^4 \sim \frac{\alpha}{s} = \frac{eE}{mc^2}$$

Магнитное поле и эффект Ааронова – Бома [8]

Как мы показали выше (14) компоненты связности $\Gamma_{\mu 4\nu}$ и $\Gamma_{4\mu\nu}$ описывают магнитное поле:

$$\Gamma_{\mu 4\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{4\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu 4}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) = \text{rot} \vec{A} = \vec{H}; \quad (18)$$

$$\Gamma_{4\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^4} - \frac{\partial g_{4\mu}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) = -\text{rot} \vec{A} = -\vec{H} \quad (19)$$

Уравнение движения заряда, соответственно: $e[\mathbf{u} \times \mathbf{H}] = m\mathbf{a}$; Как видно, магнитное поле описывается кривизной в главном расслоении :

$$H = R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x^4}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 x^4}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \right) \quad (20)$$

$R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи. Эту кривизну «чувствуют» только заряженные частицы, то есть, частицы, имеющие составляющую скорости вдоль скрытой (изотопической) степени свободы. Нейтральные частицы «чувствительны» только к кривизне, связанной с гравитацией.

В областях пространства с $H \neq 0$ согласно теореме Стокса циркуляция векторного поля $\oint A_\mu dx^\mu$ отлична от нуля. Это означает, что набег фазы или действие $S \equiv \delta\varphi = \int_1^2 A_\mu dx^\mu$ зависят от пути $1 \rightarrow 2$.

Чтобы лучше понять в чем заключается эффект Ааронова – Бома, представим пространство в котором есть область с кривизной $R_{\mu\nu}$ отличной от нуля. Это область с магнитным полем. В областях без магнитного поля кривизна равна нулю, но это не означает, равенство нулю векторного поля A_ν .

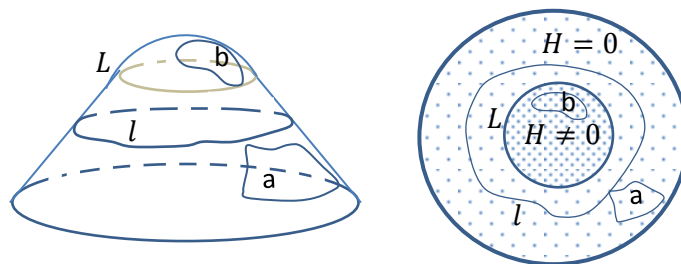


Рис.5

На рисунке 5 для примера показана коническая поверхность, шитая по контуру L со сферическим колпачком. Так как кривизна развертывающейся конической поверхности равна нулю, то интегрирование по контуру “а”, лежащему на ней, даст нулевой результат (соответственно магнитное поле $H = 0$), а интегрирование по

контур “b”, лежащему на сферическом колпачке с отличной от нуля кривизной (магнитное поле $H \neq 0$), даст отличный от нуля результат:

$$\oint_a A_\mu dx^\mu = 0; \quad \oint_b A_\mu dx^\mu \neq 0; \quad \oint_l A_\mu dx^\mu \neq 0 \quad (21)$$

Интеграл по замкнутому контуру на конической поверхности может быть отличен от нуля, лишь в том случае, если контур охватывает ее, например по контуру l на рис.5. Этот набег фазы называют топологической фазой или фазой Бери. Эффект Бома, как раз, и состоит в обнаружении этой фазы. На рисунке 6 показана упрощенная конфигурация эксперимента Ааронова - Бома.

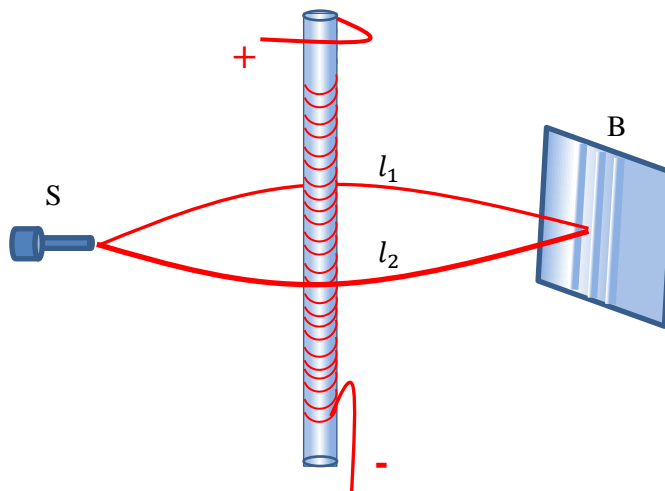


Рис.6

S- источник электронов, B- экран. Поле вне соленоида может быть сделано как угодно малым при увеличении длины соленоида.² В реальных экспериментах можно считать, что поле сосредоточено только внутри соленоида. Если ток в соленоиде отсутствует, то на экране наблюдается обычная интерференционная картина с главным максимумом в центре экрана, обусловленная дифракцией на соленоиде. Если же в соленоиде течет ток, то не смотря на то, что магнитное поле сосредоточено только внутри соленоида, а пути электронов лежат вне соленоида, дифракционная картина сдвигается. Это связано с набегом фазы Бери при обходе по замкнутому контуру области с отличной от нуля кривизной в пространстве расслоения фаз.

$$\oint A_\mu dx^\mu = \int_{l_1} A_\mu dx^\mu - \int_{l_2} A_\mu dx^\mu \neq 0 \quad (22)$$

Действие для заряженной частицы в ЭМ поле

² Экспериментаторы вместо соленоида используют нитевидные ферромагнитные кристаллы.

Напомним, что в качестве действия для заряженной частицы в электромагнитном поле берется величина:

$$S = \int_a^b \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu \right) \quad (23)$$

$$\text{Где: } ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ds – здесь интервал, а и b – точки в пространстве-времени. e, m – заряд и масса.

Нет прямых и ясных соображений как получить формулу (23). Ее получают, рассуждая от обратного, пытаясь догадаться, каким должно быть действие, чтобы, воспользовавшись затем вариационным методом получить уравнения механики, соответствующие опыту.

Покажем, что действие можно получить осмысленно, взяв за основу формулу ковариантной производной (11).

$$Dc^{j'} = dc^j - \Gamma_{ik}^j c^i dx^k$$

Ковариантный дифференциал здесь определяется, как сумма дифференциала на плоском цилиндрическом пространстве (рис.2) плюс некоторая добавка, зависящая от кривизны пространства, обусловленная электромагнитным полем (смотрите, например, рис.3). Найдем проекцию пути \mathcal{L}^4 вдоль геодезической на круговое нормальное сечение компактифицированного пространства. Из (11) имеем:

$$c^{j'} = c^j - \int \Gamma_{ik}^j c^i dx^k + \chi$$

$$\mathcal{L}^4 = \int c^4 dt - \iint \Gamma_{ik}^4 c^i dx^k dt + \int \chi dt \quad (24)$$

Здесь $\chi \neq f(x^k)$ – постоянная интегрирования.

Найдем сначала первый член в (24). Проекция скорости на протяженные координаты x^α дает наблюдаемые скорости v^α .

Итак,

$$c^4 = c \cdot \cos\varphi \quad (25)$$

$$v^\alpha = c \cdot \sin\varphi \quad (26)$$

Где угол φ есть угол между вектором скорости и образующей конуса.

c^4 – скорость вдоль координаты действия.

Легко видеть, что $c^4 = c\sqrt{1 - \beta^2}$, где $\beta = \frac{v}{c}$

Окончательно получим действие для свободной частицы с точностью до постоянного множителя:

$$\mathcal{L}_{free} = c \int dt \sqrt{1 - \beta^2} \quad (27)$$

Теперь преобразуем второй член (24), ответственный за поворот вектора скорости при параллельном переносе. Распишем по компонентам:

$$\iint \Gamma_{ik}^4 c^i dx^k dt = \iint \Gamma_{\mu\nu}^4 c^\mu dx^\nu dt + \iint 2\Gamma_{\mu 4}^4 c^\mu dx^4 dt + \iint \Gamma_{44}^4 c^4 dx^4 dt \quad (28)$$

Здесь только первый член суммы отличен от нуля (см. приложение).

$$\iint \Gamma_{\mu\nu}^4 c^\mu dx^\nu dt = \iint \Gamma_{\mu\nu,4} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} dx^\nu dt = \iint \Gamma_{\mu\nu,4} dx^\mu dx^\nu \quad (29)$$

Подставляя $\Gamma_{\mu\nu,4}$ из (14), получим:

$$\iint \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{\nu 4}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial G_{\mu 4}}{\partial x^\nu} \right) dx^\mu dx^\nu = \frac{e}{mc^2} \int A_\mu dx^\mu \quad (30)$$

Здесь мы учли, что используемые нами метрические потенциалы, а, следовательно, и поля $\Gamma_{\mu\nu}^4$ конфигурационны (то есть они зависят как от поля, так и заряда). К примеру, выше мы отмечали, что компонента связности Γ_{xx}^4 определяется отношением заряда к массе e/m и напряженностью поля E . Поэтому, мы здесь, следуя классической традиции, факторизовали вклад поля и заряда в действие. Итак:

$$\mathcal{L}_{field} = \frac{e}{mc^2} \int A_\mu dx^\mu \quad (31)$$

Подставляя найденные (27) и (31) в (24), и отождествив постоянную интегрирования χ с величиной $\chi = \frac{e\varphi}{mc}$ получим выражение, совпадающее с точностью до коэффициентов с действием для заряженной частицы:

$$S = c \int dt \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{e}{mc^2} \int A_l dx^l + \frac{e}{mc} \int \varphi dt \quad (32)$$

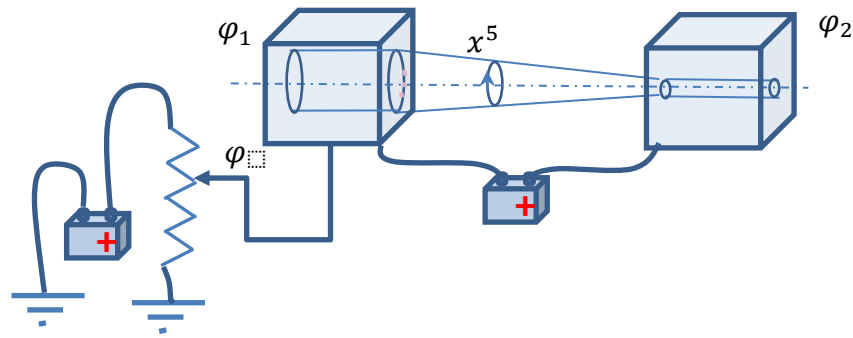
Если допустить, что действие есть число витков, наматываемых геодезической траекторией на скрытую короткозамкнутую координату, с длиной окружности равной $\delta x = \frac{h}{mc}$, то, окончательно получим известное выражение для действия частицы в поле:

$$S = \frac{m_0 c^2}{\hbar} \int dt \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{e}{\hbar c} \int A_l dx^l + \frac{e}{\hbar} \int \varphi dt \quad (33)$$

Запишем действие для покоящейся частицы в виде:

$$S = \frac{m_0 c^2}{\hbar} t + \frac{e}{\hbar} \varphi = \frac{ct}{\left(\frac{h}{c \left(m_0 + \frac{e\varphi}{c^2} \right)} \right)}$$

То есть, скалярный потенциал меняет массу частицы или, что то же самое, диаметр трубки пространства. Заменим пластины конденсатора (рис.4) клетками Фарадея:



Левая клетка находится при потенциале φ_1 , правая при φ_2 . Внутри клеток поля нет и пространства R^4 – цилиндрические, хотя и разного диаметра. Между клетками имеется разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ и поле между ними выглядит, как конус, сшивающий эти цилиндры. Кривизна этого конуса, а следовательно и напряженность поля зависят от разности потенциалов. При изменении общего потенциала, перемещением движка реостата, разность потенциалов $(\varphi + \varphi_1) - (\varphi + \varphi_2)$ не изменится. Не изменится и кривизна пространства, а следовательно и напряженность поля между клетками останется прежней. И хотя, диаметры компактифицированного пространства Клейна везде пропорционально изменятся, на физических процессах это никак не скажется. В этом и состоит глобальная калибровочная инвариантность, так как с изменением диаметров, везде изменятся и фазы точек, движущихся по поверхности вращения. В нашем случае, как мы видели, эта инвариантность выражается через произвол выбора постоянной при взятии ковариантной первообразной (24). Локальная калибровочная инвариантность в рассматриваемом примере проявляется в виде набег фазы в промежутке между клетками Фарадея, вызванном метрическими потенциалами $\Gamma_{\mu\nu}^4$, интерпретируемыми нами, как действие электрического поля.

Выводы:

На примере электромагнитных взаимодействий мы исследовали геометрическую природу калибровочных преобразований. Мы показали способ осмысленного получения действия для заряженной частицы в поле. Мы так же показали, что нет необходимости вводить релятивистскую инвариантность искусственно, как это делается не только в классической электродинамике, но и в современных квантово-полевых подходах. Релятивистская инвариантность не есть априорное свойство четырехмерного пространства – времени, а результат проецирования процессов, протекающих в расширенном пространстве на физическое наблюдаемое пространство.

Приложение

Покажем, что $\Gamma_{\mu 4}^4$, Γ_{44}^{α} и Γ_{44}^4 равны нулю.

$$\Gamma_{\mu 4}^4 = G^{4m} \Gamma_{mi 4} = G^{4\alpha} \Gamma_{\alpha \mu 4} + G^{44} \Gamma_{4 \mu 4} = G^{4\alpha} \Gamma_{\alpha \mu 4} + G^{44} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{\mu 4}}{\partial x^4} + \frac{\partial G_{44}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial G_{4\mu}}{\partial x^4} \right) = G^{4\alpha} \Gamma_{\alpha \mu 4}; \quad (1.1)$$

Член в скобках по понятной причине равен нулю. Далее умножим левую и правую части полученного равенства на $G_{\alpha 4}$, получим:

$$G_{\alpha 4} \Gamma_{\mu 4}^4 = G_{\alpha 4} G^{4\alpha} \Gamma_{\alpha \mu 4}; \quad (1.2)$$

Здесь $G_{\alpha 4} G^{4\alpha} = 0$ так как:

$$G^{4m} G_{m4} = G_{\alpha 4} G^{4\alpha} + G_{44} G^{44} = G_{\alpha 4} G^{4\alpha} + 1 \equiv 1 \quad (1.3)$$

Следовательно: $G_{\alpha 4} \Gamma_{\mu 4}^4 = 0$. Но так как $G_{\alpha 4} \neq 0$, значит $\Gamma_{\mu 4}^4 = 0$;

И наконец, третий член равен нулю:

$$\Gamma_{44}^4 = G^{4m} \Gamma_{m,44} = G^{4m} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{m4}}{\partial x^4} + \frac{\partial G_{m4}}{\partial x^4} - \frac{\partial G_{44}}{\partial x^m} \right) = 0 \quad (1.4)$$

$$\Gamma_{44}^\alpha = G^{\alpha m} \Gamma_{m,44} = G^{\alpha m} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{4m}}{\partial x^4} + \frac{\partial G_{m4}}{\partial x^4} - \frac{\partial G_{44}}{\partial x^m} \right) = 0 \quad (1.5)$$

Покажем, что $\Gamma_{\mu 4}^\alpha = \Gamma_{\mu 4, \alpha}$ и $\Gamma_{\mu \nu, 4} = \Gamma_{\mu \nu}^4$:

$$\Gamma_{\mu 4, \alpha} = G_{i\alpha} \Gamma_{\mu 4}^i = G_{\nu\alpha} \Gamma_{\mu 4}^\nu + G_{4\alpha} \Gamma_{\mu 4}^4 = \delta_{\nu\alpha} \Gamma_{\mu 4}^\nu = \Gamma_{\mu 4}^\alpha \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{\mu \nu, 4} = G_{4i} \Gamma_{\mu \nu}^i = G_{4\alpha} \Gamma_{\mu \nu}^\alpha + G_{44} \Gamma_{\mu \nu}^4 = \Gamma_{\mu \nu}^4 \quad (1.7)$$

Почему компоненту тензора $g_{\mu 4}$ отождествляют с векторным потенциалом. Рассмотрим следующие координатные преобразования:

$$\begin{aligned} x^4 &= x'^4 + f(x'^\mu); \\ x^\mu &= x'^\mu \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь протяженные координаты x^μ не меняются, а дополнительная скрытая координата x^4 меняется в зависимости от x^μ . Независимость наблюдаемых параметров (координат) от дополнительной (скрытой) координаты: $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^4} = 0$ называют условием цилиндричности [9]. Условие цилиндричности имеет глубокие корни – оно обусловлено принципиальной ненаблюдаемостью некоторых степеней свободы, что связано с физической неполнотой [10].

Калуца в своей теории рассматривал пространства с метрикой $G_{ik} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 4} \\ g_{4\mu} & g_{44} \end{pmatrix}$. Эта метрика, как легко заметить не инвариантна относительно таких преобразований. Инвариантной метрикой, то есть метрикой, сохраняющей линейную длину при указанных преобразованиях, является метрика Клейна: $G_{ik} = \frac{\partial x^m \partial x^m}{\partial x'^i \partial x'^k} = \frac{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}{\partial x'^i \partial x'^k} + \frac{\partial x^4 \partial x^4}{\partial x'^i \partial x'^k} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + g_{\mu 4} g_{\nu 4} & g_{\mu 4} \\ g_{\mu 4} & g_{44} \end{pmatrix}$. Однако, нет ни каких убедительных доводов требовать инвариантность метрики расширенного пространства.

Вычислим :

$$A_\mu = -G_{\mu 4} = \frac{\partial x^m \partial x^m}{\partial x'^\mu \partial x'^4} = \frac{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^4} + \frac{\partial x^4 \partial x^4}{\partial x'^\mu \partial x'^4} = \frac{\partial x^4}{\partial x'^\mu} \quad (15)$$

Возьмем производную по x^μ от первого уравнения (1.8) :

$$\frac{\partial x'^4}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^4}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}; \text{ Здесь очевидна аналогия } G_{\mu h} \text{ с вектор потенциалом } A_\mu, \text{ для которого}$$

справедлива градиентная инвариантность: $A'_\mu = A_\mu + \nabla \psi(x_\mu)$.

Литература:

1. *П. Г. Бергман*. Введение в теорию относительности. 1947
2. *Ю.Б. Румер Ю.Б.*, Исследования по 5-оптике, Физматгиз, М., 1956
3. *А.В. Каминский.*, Частицы и поля в субъективной физике. Квантовая Магия, том 9, вып. 1, стр. 1101-1136, 2012
4. *М.В. Садовский*. Лекции по квантовой теории поля. Екатеринбург, 620016, Россия.
5. *М. Даниэль, С.М.Виалле.*, Геометрический подход к калибровочным теориям типа Янга-Миллса. УФН, 136 (1982) 377-419 (Rev. Mod. Phys., 52 (1980) 175-197);
6. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. - М.: Мир, 1970
7. *Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М.* Теория поля. — Издание 6-е, исправленное и дополненное. — М.: Наука, 1973. — 504 с. — («Теоретическая физика», том II), стр. 78
8. *Y.Aharonov and D.Bohm, Phys.Rev. 115*, 485 (1959).
9. *Jay R. Yablon., Kaluza-Klein Theory and Lorentz Force Geodesics.*, 910 Northumberland Drive., Schenectady, New York, 12309-2814
10. *Каминский А.В.* Физическая неполнота - ключ к объединению физики; Гипотезы, размышления, исследования LAP LAMBERT Academic Publissing (2012-08-31)