Квантовая Магия, том 6, вып. 2, стр. 2101-2109, 2009

Что описывают волновые уравнения?

А.В. Каминский

(Получена 31 марта 2009; опубликована 15 апреля 2009)

Рассматривается интерпретация квантовой механики, в которой волновые уравнения описывают не поля, а финитное детерминированное движение безмассовых частиц вдоль геодезических замкнутого многообразия.

Понятие поля предполагает возможность с каждой точкой пространства связать число, вектор, тензор, спинор или гиперкомплексные числа. Но, если мы хотим эксплицировать физику до фундаментального уровня, мы должны снять всякое вырождение, развернув поля в геометрические структуры[1].

В общепринятой интерпретации функция $\psi(x^i)$ в волновом уравнении описывает поле в указанном выше смысле, независимо от того это поле давления в звуковой волне, электромагнитное поле или поле материи де-Бройля. Допустим, поле ψ с единичной амплитудой описывается комплексной функцией (рис.1):

$$\psi = e^{i\frac{S(x^i)}{\hbar}} \to \xi \in C$$

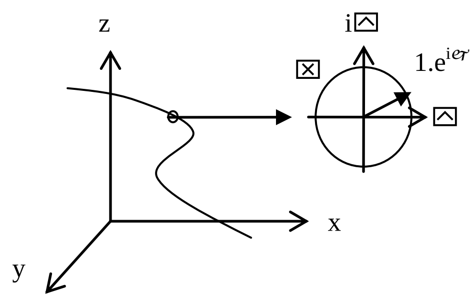


рис.1

Она отображает путь в координатах x^i на некоторую окружность ξ единичного радиуса в пространстве переменных поля. Значение поля можно выразить в квадратурах полевых переменных. Координата на окружности характеризует фазу поля.

Но возможен принципиально иной подход, когда отображение осуществляется не на пространство полевых переменных (например, потенциалы электромагнитного поля), а на само же исходное координатное пространство $\{x^i\}$ (рис.2):

[1] Геометризация, проведенная до предельной глубины, возможно, предполагает так же отказ от бесконечностей всякого рода, включая иррациональности. Тогда, единственным кандидатом на роль фундаментального пространства будут геометрии над конечными полями.

$$e^{i\frac{S(x^i)}{\hbar}} \to \xi(x^i)$$

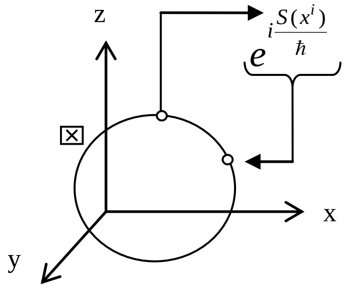


рис.2

Мы будем рассматривать класс петель, гомеоморфных этой окружности. Напомним, что петлей в непрерывном пространстве $\{x^i\}$ называют отображение $\Psi:[0,1]\to\{x^i\}$ такое, что $\Psi(0)=\Psi(1)=x_0\in\{x^i\}$. Такой подход единственно возможен при рассмотрении динамики на объективном уровне. Действительно, если точка в пространстве $\{x^i\}$ дает исчерпывающее описание процессов в системе (в классической механике это точка в фазовом пространстве), то помещение в такое (фундаментальное) пространство полей будет избыточно. Процессы в фундаментальном пространстве могут быть описаны только отображением одних точек пространства в другие его точки. По этой же причине в фундаментальном пространстве недопустимо введение геометризованных полей. Действительно, как известно, поля могут быть описаны кривизной пространства, но любая кривизна, по сути, является расслоением, и, следовательно, дополнительным измерением. Например, Риманова кривизна является расслоением углов над плоской базой.
До конца последовательным в геометризации физики был только Эйнштейн. В дальнейшем, в виду проблематичности геометризации квантованных полей (в частности, отсутствие идей относительно того, как получить квантовую нелокальность), заставило основную часть исследователей идти по эклектическому пути частичной геометризации, предполагая существование полей (подчиняющихся квантовой аксиоматике) и пространств, как независимых априорных сущностей.

Далее мы приведем пример копускулярно-петлевого описания электромагнитного поля. Мы ограничимся описанием фотонов в скалярном приближении (без учета поляризации). Рассмотрим частный случай, когда функция $\psi(x^i)$ отображает петлю $\xi(x^i)$ в пространстве-времени саму в себя (автоморфизм). То есть мы будем рассматривать гомотопический класс отображений $S^1\to S^1$. Не уменьшая общности, рассмотрим одномерное движение точки вдоль петли. Тогда функция:

$$\psi = e^{i(\omega t-kx)} \qquad (1)$$

отображает точку с координатами $\{t,x\}$ в точку с координатами $\left\{t,(\omega t-kx)\cdot\frac{L}{2\pi}+const\right\}$ на той же петле, где L - длина петли. Это может быть интерпретировано следующим образом: первая пара координат относится к наблюдателю (субъекту), а вторая к фотону (В нашем описании - точечному объекту). Частица может быть наблюдена, только при встрече с наблюдателем. Таким образом, функция (1) описывает взаимозависимое (сцепленное) движение наблюдателя и фотона [1,2,3,4]. Рассматриваемое зацепление связано, но не имеет прямого отношения к так называемым запутанным состояниям, описывающимся не факторизуемыми волновыми функциями. В дальнейшем анализе будем опираться на следующие 2 принципа, которые лежат в основе подхода, который мы называем субъективной физикой (СФ). Идея этого подхода опирается на вполне физичное представление о том, что характер известных нам физических законов, определяется конфигурационным отношением наблюдателя и мира.

Принцип 1: Мир – конечное множество состояний W, отображающееся в себя самого взаимно однозначным образом, так, что любое состояние этого множества является либо причиной, либо следствием любого его состояния. Такая структура, представляет собой конечный связный ориентированный граф, содержащий Гамильтонов цикл.

Принцип 2: множество состояний замкнутой системы (мира) W факторизуется следующим образом: $W = S \otimes H$, где S – множество физических состояний субъекта (наблюдателя), а H- множество скрытых состояний Вселенной недоступных для наблюдателя. Символ $\otimes$ обозначает произведение Кронекера.

Рассмотрим упрощенное волновое уравнение, в обычной интерпретации, описывающее движение волны в одном направлении:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (2)$$

Подставляя в него решение (1), получим соотношение $\varpi = kc$. Учитывая граничные условия – длина резонатора равна L, имеем так же объективную скорость фотона:

$$V^{Obj} = L\varpi \qquad (3)$$

Из требования цикличности движения (*Принцип 1*), необходимо чтобы было $L = n\lambda$, поэтому:

$$V^{Obj} = nc \qquad (4)$$

Число n характеризует класс непрерывных отображений окружности в окружность $z \to z^n$, для которого n – есть число витков намотки первой окружности на вторую. Требование цикличности оно же здесь и требование конечности, так как, если отношение длин петель иррационально, то подсистема фотон-наблюдатель должна была бы иметь бесконечное число состояний, что противоречило бы исходной установке о том, что мир представляет собой конечную систему (*принцип 1*).

Пусть T- период основной моды поля. За это время пространственный осциллятор (фотон), который характеризуется координатой x , обходит петлю состояний один раз и возвращается в исходную точку. Скорость его минимальна и равна скорости света c. Произведением двух петель [3] ξ_1 и ξ_2 в топологии называется петля ξ_{12}, которая получается последовательным прохождением петель сомножителей.

Квантовая Магия, том 6, вып. 2, стр. 2101-2109, 2009

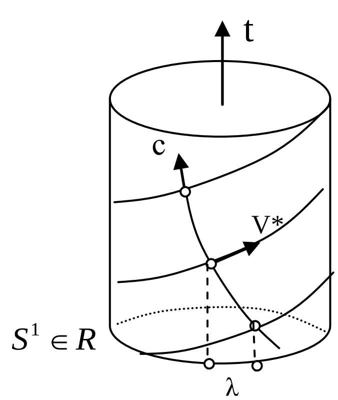
$$\xi_{12} = \begin{cases} \xi_1(2x), & 0 \le x \le 0.5 \\ \xi_2(2x-1), & 0.5 \le x \le 1 \end{cases} \qquad (5)$$

Исходя из этого определения, n-я мода поля будет описываться петлей $\Omega = \xi^n$. Такая петля описывает фотон, совершающий за время T - n циклов. Скорость его будет равна c*= nc. Движение фотона в случае высших мод происходит вне светового конуса, поэтому для физического наблюдателя это выглядит, как поле, заполняющее некоторую область пространства (например, полость резонатора). На рис.3 поверхность цилиндра изображает конфигурационное пространство субъект – объект в координатах {x,t}. Замкнутость пространства по x соответствует условию замкнутости рассматриваемой задачи. Ниже мы покажем, что период T – для субъекта (наблюдателя) является минимально различимым временем для данной моды колебаний. Поэтому, движение фотона не может быть наблюдено и воспринимается им (наблюдателем), как поле, заполняющее пространство внутри полости резонатора. Свободная частица движется в полости "вселенского" резонатора, глобальная топология которого обеспечивает периодичность граничных условий. Достаточно изъять частицу из системы (Это происходит в результате измерения) и поле мгновенно исчезает из всех точек пространства (нелокально!), ибо оно формировалось частицей за промежуток времени неразличимый наблюдателем [6]. Эта ситуация моделирует процесс коллапса квантового состояния.

Вычислим субъективную скорость фотона (скорость фотона относительно наблюдателя). Ее можно определить, записав условие встречи фотона с наблюдателем:

$$x = (\omega t - kx)L/2\pi \qquad (6)$$

Выделяя x, получим: $\upsilon_n = \dfrac{\varpi L}{(1+kL)}$. Для мод высокого порядка ($n = kL >> 1$), получим $\upsilon = \omega / k = c$.



Движение фотона по пространственно-подобной петле разворачивается в правую спираль. Линия, соединяющая точки встречи фотона с наблюдателем образует световой конус x=ct

рис.3

Множество точек пересечения мировых линий фотона и наблюдателя дается последовательностью отображений Пуанкаре [7]: $P:(t \to t+nT,\ x \to x+n\lambda)$ в пространстве $R \in \{t \otimes S^1\}$. Множество этих точек лежит на гиперповерхности $\zeta \in \Lambda$ светового конуса. Отображение Пуанкаре связывает дискретную динамику с непрерывной[2], описываемой дифференциальными уравнениями и используется, как формальный метод упрощающий исследования квазипериодической Гамильтоновой динамики. В этой математической структуре просматривается нечто большее, чем вычислительный прием,- отображение Пуанкаре описывает редукцию от объективной квазимеханики к субъективной физике. При этом, траектория фотона $\zeta(t)$, генерируемая отображением Пуанкаре, предстает для наблюдателя дискретным множеством точек (пунктиром). Расстояние между точками, при этом, равно длине волны. Наблюдателю кажется, что фотон движется по образующей светового конуса со скоростью с, так как реальное сверхсветовое движение находится вне его восприятия. Кроме того, из этого следует, что фотон относительно наблюдателя всегда находится в движении.

Волновое уравнение, наиболее общего вида, имеет решением как функции $\psi = f(x-ct)$, так и $\psi = f(x+ct)$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad (7)$$

Для второго класса решений все сказанное остается справедливо, но спираль (рис.3) будет иметь симметрию левого винта.

Оптико-механическая аналогия [8]

Оптико-механическая аналогия была известна еще Гамильтону. Она заключается в том, что, как уравнения механики, так и уравнения распространения лучей в оптике получаются сходным образом из соответствующих вариационных принципов. В первом случае вариации подлежит – действие $\delta S = 0$, а во втором эйконал $\delta\Psi = 0$. В обоих случаях получаем, так называемое, уравнение Гамильтона-Якоби. Опять же, в первом случае, это уравнение для действия, а во втором – для эйконала[3].

$$\frac{\partial S \partial S}{\partial x^i \partial x_i} = m^2c^2\,; \qquad \frac{\partial\Psi\partial\Psi}{\partial x^i \partial x_i} = 0\,; \qquad (8,9)$$

Здесь $x_0 = ct;\ x^i = x, y, z;\ x_i = -x, -y, -z$. Аналогия эта не случайна, что видно хотя бы из того, что уравнения типа Гамильтона - Якоби всегда можно получить предельным переходом $\Psi \to \infty$ из волнового уравнения.

---

[2] Отображение Пуанкаре описывает стробоскопический эффект.

[3] Здесь и далее мы рассматриваем простейший случай изотропной метрики, не зависящей от времени $g_{ik} = const$. В случае оптики это соответствует однородной среде с не зависящим от времени коэффициентом преломления.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x_i} = 0 \qquad (10)$$

Подставляя $\psi = A\exp(i\Psi)$ и сохранив только квадратичные члены по Ψ, получим уравнение Гамильтона - Якоби (9). Интересно, что в теории струн для получения уравнений движения минимизируют естественный аналог действия или эйконала — площадь цилиндра, заметаемую, замкнутой струной. Имеет место интересная аналогия с СФ. В СФ мы минимизируем длину траектории, наматывающейся на конфигурационное пространство, что по сути одно и то же (рис.3).

Наиболее ярко оптико-механическая аналогия проявляет себя в форме, так же хорошо известной, волноводно-оптической аналогии [9].
Дополним волновое уравнение (10) еще одной степенью свободы x^h:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x_i} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^h} = 0 \qquad (11)$$

Напомним, что требование периодичности решений по всем степеням свободы формально вытекает из *принципов 1 и 2* (см. начало статьи). Будем искать решение в виде: $\psi = \psi_0 \exp(ax_\alpha)\exp(bx_0)\exp(cx^h)$. После соответствующего отождествления констант a,b,c, получим характеристическое уравнение:

$$k = \sqrt{\frac{\varpi^2}{c^2} - \frac{m_0^2 c^2}{h^2}} \qquad (12)$$

представляющее собой известное релятивистское соотношение, связывающее импульс и энергию частицы с массой покоя m_0. Здесь с- скорость света, а h- постоянная Планка. То есть для массивных частиц имеет место дисперсия в вакууме, как если бы, волны распространялись в некоем волноводе с поперечным сечением равным $a = \frac{h}{2m_0 c}$. Для фотонов $m_0 = 0$ и дисперсия в вакууме отсутствует. То есть, для описания массивных частиц требуется еще одна степень свободы. Это можно представить тем же цилиндром (рис.3), но имеющим толщину $h/2m_0c$ (Длина волны Комптона). При длине волны, сравнимой с этой величиной в слое (волновод) могут возбудиться дополнительные моды, в результате чего, частица обретает массу. Известно, что жесткие γ- кванты ведут себя, как тяжелые частицы. Формальное объяснение в рамках квантовой электродинамики сводится к к увеличению вклада петлевых диаграмм, что интерпретируется, как облако массивных виртуальных частиц, сопровождающее фотон.

Очевидно, уравнению (11) соответствует релятивистки ковариантное пятимерное уравнение Якоби, которое можно получить описанным выше предельным переходом.

Квантовая Магия, том 6, вып. 2, стр. 2101-2109, 2009

$$\frac{\partial\zeta\partial\zeta}{\partial x^i\partial x_i}+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x^h}\right)^2=0 \qquad (13)$$

Оптико-механическая аналогия претерпела долгую эволюцию. Например, Шредингер, конструируя свое уравнение, так же рассматривал эту аналогию. Позже к ней обращались другие исследователи, пытаясь получить квантовую механику в R^4, как проекцию волновой оптики в R^5 [10]. Однако, такой подход изначально был обречен на неудачу, так как не позволял получить, свойственную квантовой механике нелокальность.

В контексте субъективной физики оптико-механическая аналогия предстает несколько в ином виде. Мы покажем, что поверхности равных фаз, описывающиеся уравнением Якоби, вовсе не обязательно интерпретировать, как волновые фронты. Из уравнения (13) этого не следует. И, хотя, это уравнение можно получить предельным переходом от соответствующего пятимерного волнового уравнения, из этого нельзя делать вывод о том, что уравнение Якоби имеет какое-то отношение к волновым процессам. Дело в том, что, как мы уже говорили, волновое описание это интерпретация, возможная только в редуцированном (физическом или субъективном) базисе. Действительно, мы с тем же успехом, можем записать волновое уравнение в объективном пространстве, то есть в таком пространстве, где нет избыточных степеней свободы, но в этом пространстве, как уже говорилось, невозможно задать поле в обычном смысле.

Мы показали (см. формулу 12 и далее), что для описания массивных частиц 4-х измерений не достаточно. Для этого необходимо либо обычное полевое описание в 4-х мерном пространстве, либо описание траекториями в 5-ти мерном пространстве. Запишем еще раз волновое уравнение (11) (напоминаем, что мы его интерпретируем, как уравнение, описывающее циклические траектории) для пространства $\mathbf{R}^5$ $\{t,x,y,z,x^h\}$:

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^{h}}\right)\psi=0 \qquad (14)$$

В соответствии с *принципом 2,* подставим в него волновую функцию в факторизованном виде с выделенной скрытой компонентой:

$$\psi=\psi(x,y,z,t)\psi(x^h); \qquad (15)$$

Компонента $\psi(x^h)$ согласно *принципу 1* должна быть циклической. Будем искать ее в виде: $\psi=\exp(imcx^h/h)$[4]. Учитывая так же, что в отсутствии полей $A_i=\frac{\partial x^h}{\partial x^i}=0$, а так же, используя условие субъективной независимости физических процессов от скрытой координаты [10,11] (цилиндричность) $\frac{\partial x^i}{\partial x^h}=0$, после не сложных преобразований, получим уравнение Клейна — Гордона для свободной частицы:

[4] h/m_0c – комптоновская длина волны. Для электрона ~ 1e-10 см.

Квантовая Магия, том 6, вып. 2, стр. 2101-2109, 2009

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \frac{m^2c^2}{h^2}\psi \qquad (16)$$

Это уравнение является релятивистской версией уравнения Шредингера. То есть, уравнения квантовой механики возникают в результате редукции волнового уравнения в объективном (5-мерном) пространстве к субъективному (4-х мерному) наблюдателю.

Выводы

Мы предположили, что за описанием квантового поля в волновой форме:

$$\psi = e^{iwt}e^{ikx}$$

стоит некая квазимеханическая связь (зацепленность) двух циклических процессов, относящихся к наблюдателю и объекту наблюдения соответственно (*принцип 2*). Например, переменная x здесь может интерпретироваться, как наблюдаемая. То есть переменная, относящаяся к наблюдателю и характеризующая его состояние. Переменная t - параметризует состояние фотона, указывая его координату на одномерной петле $x'(t)$. В обычной интерпретации, говорят не о координате x', а о фазе поля $\omega t - kx$, так как движение фотона для наблюдателя скрыто. Волновая функция ψ характеризует состояние квазизамкнутой системы фотон – наблюдатель. Итак, в рассматриваемой интерпретации, волновое уравнение описывает не поле, а детерминированное циклическое движение некоей точки (безмассовой[5] частицы). Такое движение пространственно-подобно и, поэтому, не наблюдаемо. Наблюдаемы только те объекты внешнего мира, которые имеют кратные частоты по отношению к собственной частоте наблюдателя (стробоскопический эффект). Все остальные объекты (частицы) с не кратными частотами образуют флуктуирующий вакуумный фон [3]. Частица может быть зафиксирована только на поверхности, образуемой множеством точек пересечения ее мировой линии с мировой линией наблюдателя .Эта поверхность определяется уравнением Гамильтона-Якоби. Координата частицы может быть измерена наблюдателем с точностью, допустимой соотношением неопределенности для функции ψ с ограниченным спектром. Мы показали, на простых примерах, что обычная гамильтонова динамика при условии стационарности траекторий динамической системы в фазовом пространстве, с точки зрения ее подсистемы, приобретает свойства релятивистской квантовой механики. Основным требованием является устойчивость замкнутых траекторий. Однако, как легко видеть, с точки зрения наблюдателя, механически сцепленного с объектом наблюдения, выполнимость этого условия автоматически обеспечивается *принципами 1 и 2*[6].

Рассмотренная интерпретация полностью совместима с квантово-полевым описанием, она позволяет перенести рассмотрение ряда концептуальных вопросов квантовой механики из плоскости философии в плоскость логического осмысления. К таким вопросам относятся, в

[5] Массы и заряды в этой схеме, по всей видимости, должны иметь топологическое происхождение.

[6] *Принципы 1 и 2* допускают только узкий класс – интегрируемых Гамильтоновых систем, траектории которых замкнуты [12] и имеют моды с рациональным отношением частот.

Квантовая Магия, том 6, вып. 2, стр. 2101-2109, 2009

частности вопросы корпускулярно – волнового дуализма, редукции квантового состояния и совместимости релятивисткой и квантовой теории.

Литература

1. А.В. Каминский. "Моделирование физики в условиях неполноты". Квантовая Магия, том 1, вып. 3, стр. 3126-3149, 2004
2. А.В. Каминский. "Анатомия квантовой суперпозиции". Квантовая Магия, том 3, вып. 1, стр. 1130-1142, 2006.
3. А.В. Каминский. "Интерпретация экспериментов с фотонами в терминах субъективной физики". Квантовая Магия, том 5, вып. 4, стр. 4101-4120, 200
4. А.В. Каминский. "Механика квантовой механики". Квантовая Магия, том 5, вып. 4, стр. 4121-4131, 2008.
5. А.В. Каминский. "О скрытой природе спина". Квантовая Магия, том 2, вып. 2, стр. 2114-2131, 2005
6. А.В. Каминский. "Скрытое пространство время в физике". Квантовая Магия, том 2, вып. 1 , стр. 1101-1125 , 200
7. В. И. Арнольд. "Математические методы классической механики", Эдиториал УРСС, М., 2000.
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория Поля. т2. стр.175 и далее.
9. R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Vol. 6
10. Ю.Б. Румер Ю.Б., Исследования по 5-оптике, Физматгиз, М., 1956.
11. Ю.Б. Румер. Действие как координата пространства. (I - IX) - ЖЭТФ, 1949, т.19
12. Арнольд В. И. «Математические методы классической механики», из. 5-ое, М.:Едиториал УРСС, 2003, ISBN 5-354-00341-5