

Пол Бенев

Division of Environmental Impact Studies,
Argonne National Laboratory,
Argonne, Illinois, 60439.

КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКАЯ ГАМИЛЬТОНОВА МОДЕЛЬ МАШИНЫ ТЬЮРИНГА

Квантовомеханические гамильтоновы модели, которые представляют произвольное конечное число шагов вычисления произвольной машины Тьюринга, реализованы на конечной решетке системы $\frac{1}{2}$ -спинов. Различные области решетки соответствуют различным составляющим машины Тьюринга (вместе с системой записи). Последовательность состояний машины во время произвольного вычисления представляется последовательностью спиновых состояний модели. Построены модели, управляемые гамильтонианами как зависящими, так и не зависящими от времени. Не зависящие от времени модели не рассеивают энергию, а состояния системы не деградируют во время эволюции. Они оперируют почти на квантовом пределе, так что отношение «неопределенность полной энергии системы»/«скорость вычисления» близка к пределу, определяемому соотношением неопределенностей «энергия–время». Однако эволюция таких моделей глобальна во времени, а гамильтонианы сложны по сравнению с гамильтонианами, зависящими от времени. Соответствующие последним гамильтонианам модели не приводят к деградации состояний. Кроме того, они локальны во времени и гамильтонианы их достаточно просты.

1. Введение

В последнее время повысился интерес к задаче о физических ограничениях вычислительных процессов. В частности, темой многочисленных дискуссий стали вопросы энергетической цены вычислений или передачи информации и неизбежности диссипации энергии при вычислениях [1–10]. Несколько лет назад [3, 7] сложилось мнение, что вычисления связаны с диссипацией по той причине, что процессы вычисления необратимы. Однако в 1973 году Беннет [2] построил обратимую модель процесса вычисления и обсудил термодинамически обратимые модели вычисления. Последние статьи на эту тему [1,10], в которых утверждалось, что энергия

при вычислениях обязательно рассеивается, критиковались Дойчем [5]. Ландауэр [11] подчеркнул важность окончательного выяснения, существуют ли модели вычислительных процессов, не связанные с рассеянием энергии. Фредкин и Тоффоли [12] построили классическую модель, в которой вычисления без потери энергии ведут бильярдные шары. В других работах [13–15] построены квантовомеханические гамильтоновы модели машин Тьюринга и обратимых дискретных процессов. В этих моделях вычислительный процесс приводится в движение последовательными рассеяниями. Две из них диссипативны в том смысле, что состояние полной системы эволюционирует так, что со временем возрастают амплитуды нежелательных (чистых) состояний. В другой модели [13] диссипация отсутствует. Эти свойства моделей следуют из предположения, что кинетическая энергия рассеивателей является линейной функцией импульса.

В представляемой работе построены квантовомеханические гамильтоновы модели машин Тьюринга, не использующие механизма последовательного рассеяния. Эта модель содержит решетку, в которой некоторые конфигурации $1/2$ -спинов вдоль определенной оси соответствуют частям машины Тьюринга. Изменения в такой системе описываются операторами переворота спина, преобразующими спины, локализованные в определенных местах решетки. Поскольку модель не требует относительных перемещений, в ней отсутствуют такие источники диссипации, как расплывание волновых пакетов и т. п., присутствующие в других моделях [14, 15].

В следующем разделе дается краткий обзор теории машины Тьюринга. Затем следует изложение конструкции, представляющей собой машину Тьюринга вместе с системой записи как конфигурацию решетки $\frac{1}{2}$ -спинов. Соответствующая модель состояний конфигурации проекционных операторов и элементарных операторов, производящих изменение состояний конфигурации, строится в разделе 3. Эти состояния и операторы используются в разделах 4 и 5 для построения, соответственно, зависящих и не зависящих от времени гамильтоновых моделей первых J шагов машины Тьюринга.

В разделах 6 и 7 обсуждаются характеристики построенных моделей, свойства и ограничения измерений различных подсистем моделей. Оказывается, что модели с не зависящими от времени гамильтонианами не рассеивают энергию и эволюция таких моделей не приводит к деградации состояний. Эффективность операций в таких системах такова, что отношение неопределенности энергии к скорости вычисления не превосходит $2\pi\hbar$. Однако соответствующие гамильтонианы могут показаться слишком сложными. Независимые от времени гамильтонианы приводят

к глобальной во времени эволюции, так что измерения, которые определяют параметры системы, оказываются крайне сложными. Такие измерения вызывают рассеяние энергии и возмущают состояния системы. (Глобальными во времени мы называем такие модели, которые, эволюционируя от состояния, представляющего n -й шаг вычисления, к состоянию, представляющему $(n + 1)$ -й шаг, проходят через состояния, представляющие все шаги вычисления. Модель локальна во времени, если промежуточные состояния являются линейной комбинацией только состояний n -го и $(n + 1)$ -го шагов вычисления.)

Модели, основанные на гамильтонианах, зависящих от времени, также не приводят к деградации состояний системы. Эти гамильтонианы более просты, и эволюция моделей локальна во времени. В результате измерения, которые должны установить, закончились ли вычисления, не столь трудны, как в предыдущих моделях, они не возмущают состояния системы и не приводят к диссипации энергии. Однако, в этом случае необходимо предусмотреть внешние устройства, управляющие последовательными шагами вычисления. В разделе 8 сравниваются некоторые аспекты рассмотренных моделей с моделями, предложенными в других работах [13–15].

2. Машина Тьюринга

2.1. Предварительные сведения

Поскольку машины Тьюринга подробно описаны в литературе [2,16], мы ограничимся кратким изложением проблемы. Машина Тьюринга состоит из трех частей: внутренней машины \mathcal{L} , вычислительной ленты \mathcal{T} и вычислительной головки \mathbf{h} . Состояния \mathcal{L} можно представить числами $0, 1, \dots$ из \mathbb{N} , \mathcal{T} — это лента, состоящая из бесконечного числа клеток, каждая из которых может находиться в одном из конечного числа состояний из S — алфавита символов. Особый элемент из S — b обозначает пустую клетку. На ленте \mathcal{T} можно написать выражения — последовательности символов $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow S$, где \mathbb{Z} — множество целых чисел и $\gamma(j) = b$, исключая не более чем конечное число значений j .

Элементарные операции машины задаются пятерками $l(s, s', \alpha)l'$, каждая из которых означает, что \mathcal{L} в состоянии l и символ s в клетке из \mathcal{T} , только что прочитанный \mathbf{h} , переходят l' и s' , а головка \mathbf{h} перемещается на одну клетку вправо ($\alpha = +1$) или влево ($\alpha = -1$) или остается на месте ($\alpha = 0$). Каждая машина Тьюринга соответствует конечному мно-

жеству пятерок Q , в котором нет пятерок, начинающихся с двух одинаковых символов. Если в конце некоторого шага \mathcal{L} находится в состоянии l , а s — символ, прочитанный \mathbf{h} , то следующий шаг задается пятеркой вида $l(s, -, -)$. Если такой пятерки в Q нет, то машина останавливается.

Каждая машина Q определяет функцию $\tau_Q : \mathbb{N} \times S \rightarrow \mathbb{N} \times S \times [-1, 0, 1]$, где

$$\tau_Q(l, s) = (l' s' \alpha) \quad (1)$$

для каждой пары (ls) из пятерки $l(ss' \alpha)l'$, принадлежащей Q . Если в Q нет пятерки с l и s , то $\tau_Q(ls) = (ls0)$.

С помощью функции τ_Q можно определить переходную функцию машины T_Q как отображение $T_Q: ID \rightarrow ID$, где $ID = \mathbb{N} \times (S)_b^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ — множество мгновенных описаний машины. Приведем явное выражение функции T_Q :

$$T_Q(l\gamma(j)) = (l' \gamma' j'), \quad (2)$$

где $\tau_Q(l, \gamma(j)) = (l', \gamma'(j), \alpha)$, $j' = j + \alpha$ и $\gamma'(k) = \gamma(k)$ для всех $k \neq j$. Шаги Q соответствуют итерациям T_Q , и процесс вычисления останавливается в неподвижной точке Q .

Удобно ограничиться такими машинами Тьюринга, которые выполняют вычисления в стандартной форме. В этом случае начальное состояние определяется как состояние «1», головка \mathbf{h} читает символ в клетке «0» из \mathcal{T} и каждое выражение $\gamma_i(j) = b$, если $j < 0$, и нет двух непустых состояний символов в γ_i , разделенных пустым. В этом случае после n шагов вычислений стандартной машины Тьюринга состояние внутренней машины \mathcal{L} находится среди первых N_n чисел из \mathbb{N} , где

$$N_n = \sum_{j=0}^n m^j. \quad (3)$$

Здесь и далее m — число символов в алфавите S . Стандартное конечное состояние похоже на начальное, следует только принять во внимание, что теперь это — одно из допустимых состояний.

Нам понадобятся числа, которые представляют в решетчатой модели двоичные цепочки спинов, направленных вверх (+) и вниз (−).

Для представления всех положительных чисел, не превосходящих n , требуется $l_2(n)$ двоичных цепочек, где

$$l_2(n) = \begin{cases} [\log_2(n)] + 1, & \text{если } \log_2(m) - [\log_2(m)] > 0, \\ \log_2(n), & \text{если } \log_2(m) - [\log_2(m)] = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $[r]$ означает наибольшее целое, не превосходящее числа r . Пустые клетки \mathcal{T} моделируются цепочками $(-)$ -спинов. В представлении двоичных чисел на решетке спинов $(+)$ -спины соответствуют 1 и $(-)$ -спины — 0. Таким образом, каждая пустая клетка \mathcal{T} соответствует числу 0, записанному в клетке.

В дальнейшем будут рассматриваться системы, которые моделируют только J первых шагов стандартной машины Тьюринга. Это ограничение, вызываемое исключительно интересами математической простоты, позволяет избежать бесконечномерных квантовых систем. Теперь состояния внутренней машины \mathcal{L} будут находиться среди чисел $[1, 2, \dots, N_j]$.

Вообще говоря, функция перехода T_Q машины Тьюринга не взаимно однозначна. Чтобы построить гамильтонову модель дискретного процесса, необходимо иметь взаимно однозначную функцию перехода. Это можно сделать, добавив записывающую систему \mathcal{R} и записывающую головку \mathbf{j} . В этом случае каждый шаг машины Тьюринга будет связан с операциями трех типов: запись, вычисление, сдвиг. При операции записи состояние внутренней машины \mathcal{L} , запись в клетке из \mathcal{T} , прочитанная головкой \mathbf{h} , и положение \mathbf{h} записываются в пустой клетке из \mathcal{R} . Эти клетки сканирует головка \mathbf{j} . При операции вычисления состояния внутренней машины \mathcal{L} запись в клетке из \mathcal{T} и положение головки \mathbf{h} изменяются так, как это предписывает пятерка из Q , два первых символа которой записаны в клетке из \mathcal{R} , осмотренной головкой \mathbf{j} . Третий тип операции — сдвиг \mathbf{j} к новой клетке записи. Эти три типа операций моделируются на спиновой решетке или как три типа преобразований, повторяющихся снова и снова (раздел 4), или как повторные преобразования одного типа (раздел 5).

2.2. Спин–решетчатая модель

Можно построить модель только что описанной системы, используя двумерную решетку спинов величины $\frac{1}{2}$. Каждая составляющая системы моделируется как подрешетка спиновой системы. Кроме подрешеток для внутренней машины \mathcal{L} , вычислительной ленты \mathcal{T} и вычислительной головки \mathbf{h} , в этой решетке выделяются подрешетки для записывающей головки \mathbf{j} и записывающей системы \mathcal{R} . Все эти решетки изображены на рисунке 1. Приведем детальное описание системы. Модель внутренней машины \mathcal{L} , способной воспроизвести J шагов стандартной машины Тьюринга, требует для своей реализации область $R_{\mathcal{L}}$, занимающую по крайней мере $l_2(N_J)$ узлов решетки. Для удобства расположим $R_{\mathcal{L}}$ так, чтобы она

содержала $J + 1$ узел в x -направлении, занимая места от 0 до J , и M узлов в y -направлении, занимая места от 0 до $M - 1$. Здесь и в дальнейшем $M = l_2(m)$ — это длина двоичной цепочки, необходимой для представления символов в алфавите S . Заметим, что поскольку $N_J \leq m^{J+1}$, то в силу равенства (2) $MJ + J \geq l_2(N_J)$. Каждое состояние l внутренней машины \mathcal{L} , достижимое за $\leq J$ шагов, когда оно рассматривается как одно из чисел $\{1, \dots, N_J\}$, может быть представлено как обращенное двоичное представление числа в виде конечной последовательности нулей и единиц. Например, $2 = 01$, $3 = 11$, $4 = 001$ и т. д. Здесь числа записываются обратном порядке для того, чтобы можно было воспользоваться представлением последовательностями из нулей и единиц длины чисел $\{1, \dots, M \cdot (J+1)\}$, добавляя справа нули без изменения значения. Поэтому в дальнейшем l будет означать или число или, его расширенное двоичное представление.

Пусть Θ — некоторое отображение, которое упорядочивает узлы решетки $R_{\mathcal{L}}$. Например, $\Theta(j, k) = jM + k$ для x -координат $j = 0, \dots, J$ и y -координат $k = 0, \dots, M - 1$. Θ — это биекция из $R_{\mathcal{L}}$ в $\{0, 1, \dots, [(J+1) \cdot M] - 1\}$. Используя эту функцию, каждое состояние l внутренней машины \mathcal{L} , соответствующее спиновой конфигурации F_l в $R_{\mathcal{L}}$, можно задать формулой $F_l(i, j) = l(\Theta(i, j))$ для каждого узла (i, j) в $R_{\mathcal{L}}$. Этот пример соответствует такой планировке представления состояний с помощью обращенного двоичного представления: сначала идут первые M нулей и единиц вдоль y -направления при $x = 0$, затем M нулей и единиц с $x = 1, \dots$, и наконец M нулей и единиц вдоль линии $x = J$.

Вычислительная лента \mathcal{T} моделируется прямоугольной областью $R_{\mathcal{T}}$ длины $2J + 1$ от $-J$ до J в x -направлении (см. рис. 1). Для каждого j , $-J \leq j \leq J$, подрешетка $R_{\mathcal{T}}$ состоящая из узлов с $x = j$ и значений y , изменяющихся от M до $2M - 1$, соответствует j -й клетке на ленте. Длина ленты определяется из тех соображений, что при стандартном вычислении головка начинает свое движение с центра и за J шагов не может продвинуться более чем на J шагов влево или вправо.

Распространим принятое представление символов S на множество $(+, -)$ -последовательностей длины M . В этом случае описанная выше спиновая конфигурация спиновой подрешетки $R_{\mathcal{T}}$ соответствует содержимому j -й клетки \mathcal{T} . Эту конструкцию можно очевидным образом обобщить так, чтобы каждому выражению на ленте соответствовала конфигурация на решетке $R_{\mathcal{T}}$. В дальнейшем, в зависимости от контекста, γ будет обозначать или выражение на ленте или соответствующую спиновую конфигурацию в $R_{\mathcal{T}}$. Очевидно, что пустой клетке соответствует

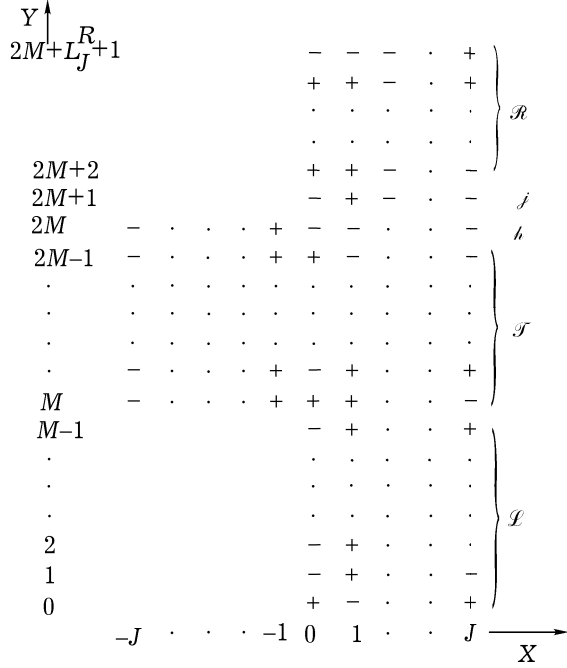


Рис. 1. Представление решетчатой модели вычислительной машины. Компоненты X и Y положений узлов задаются числами от $-J$ до J и от 0 до $2M + L_J^R + 1$ соответственно. Области решетки для компонент \mathcal{L} , \mathbf{j} и \mathcal{R} по оси x простираются от 0 до J , для компонент \mathcal{T} и \mathbf{h} — от $-J$ до J . Размер и положение областей \mathcal{L} , \mathcal{T} и \mathcal{R} по оси y показаны фигурными скобками. Узлы для головок \mathbf{h} и \mathbf{j} занимают ряды с координатами Y $2M$ и $2M + 1$ соответственно. Символ $+$ означает спин, направленный вверх, символ $-$ означает спин, направленный вниз, точки указывают на узлы со спином $1/2$

$(-)$ —последовательность или спиновая конфигурация, в которой все спины подрешетки $R_{\mathcal{T}}$ направлены вниз.

Вычислительная головка \mathbf{h} моделируется как линия с фиксированной координатой $y = 2M$ и координатой x , изменяющейся от $-J$ до J . Все спины на этой линии, кроме одного, направлены вниз. Вверх направлен тот спин, чье положение соответствует положению клетки, около которой расположена головка. Например, конфигурация $(-, -, \dots, -, +, -, \dots, -)$, где направленный вверх спин имеет координату j , представляет головку \mathbf{h} , расположенную около клетки j .

Записывающая головка \mathbf{j} моделируется так же, как и \mathbf{h} , только теперь y принимает значение $2M = 1$, а координата x изменяется от 0 до J .

Модель записывающей системы \mathcal{R} оказывается более сложной, потому что здесь с каждой клеткой, если она непустая, связывают три числа. В каждой клетке нужно записать состояние внутренней машины \mathcal{L} , символ, прочитанный головкой \mathbf{h} и положение \mathbf{h} . Для первых J шагов любого вычисления любой стандартной машины Тьюринга состояния внутренней машины \mathcal{L} лежат в интервале N_J , содержимое клетки, сканируемой \mathbf{h} , лежит в S , положение \mathbf{h} хранится в интервале $[-J, J]$.

Предположим, что существует взаимно однозначное отображение множества $(N_J \times S \times [-J, J]) \cup \{b\}$ на множество всех двоичных последовательностей длины $L_J^{\mathcal{R}}$. Дополнительный символ b позволяет учесть то обстоятельство, что сканируемая клетка может быть пустой. Поскольку отображение должно быть «отображением на» или «отображением в», то должно выполняться соотношение $L_J^{\mathcal{R}} \geq l_2[(N_J \cdot m \cdot (2J + 1) + 1)]$, в котором возможен и знак равенства, а m — это число элементов в S . Стандартный пример такого отображения дает функция Φ , определяемая равенством

$$\Phi(lsj) = 2_J(K(K(l, s), u(j)) + 1), \quad (5)$$

а $\Phi(b) = 2_J(0)$. В этом равенстве функция u отображает отрезок $[-J, J]$ на $[0, 2J]$ по правилу $u(j) = 2j + 1$, если $j > 0$ и $u(j) = -2j$, если $j \leq 0$. K — функция двух переменных [17], определенная формулой

$$K(m, n) = \frac{1}{2}(m^2 + 2mn + n^2 + 3m + n).$$

Символ s в правой части (5) означает, что s — одно из чисел из $[1, \dots, m]$. Символ $2_J(n)$ определяет обычное двоичное представление числа n , дополненное слева нулями, так, чтобы длина числа $2_J(n)$ была равна $L_J^{\mathcal{R}}$ для всех $n \leq [N_J \cdot m \cdot (2J + 1)] + 1$.

Область $R_{\mathcal{R}}$ решетки \mathcal{R} расположена между 0 до J в x -направлении и от $2M + 2$ до $2M + 1 + L_J^{\mathcal{R}}$ в y -направлении (рис. 1). Содержимое k -й записывающей клетки моделируется спинами в подрешетке $R_{\mathcal{R}}$ с координатами $x = k$ и $2M + 2 \leq y \leq 2M + 1 + L_J^{\mathcal{R}}$. Представление $2_J(j)$ числа j построено так, что при $y = 2M + 2 + n$ (+)-спин соответствует числу 1×2^n , а (-)-спин — 0×2^n . Этим определяется двоичное представление

$$j = \sum_{n=0}^{L_J^{\mathcal{R}}} [2_J(j)](n) \cdot 2^n.$$

Пусть ϕ будет отображением $[0, J]$ в $(N_J \times S \times [-J, J]) \cup [b]$. Тогда ϕ определяет регистрирующую систему, так что $\phi(k)$ — это содержимое k -й регистрирующей клетки. Отображением ϕ можно воспользоваться для построения спиновой конфигурации G_ϕ на решетке $R_{\mathcal{R}}$, в каждой точке $(k, 2M + 2 + j)$ которой

$$G_\phi(k, 2M + 2 + j) = [\Phi(\phi(k))](j). \quad (6)$$

Для простоты и для того, чтобы иметь возможность представления любых машин одной фиксированной решеткой, ее размер выбран большим, чем это необходимо. Например, если думать о реализации только одной машины, то можно значительно уменьшить размеры $R_{\mathcal{R}}$ и $R_{\mathcal{L}}$.

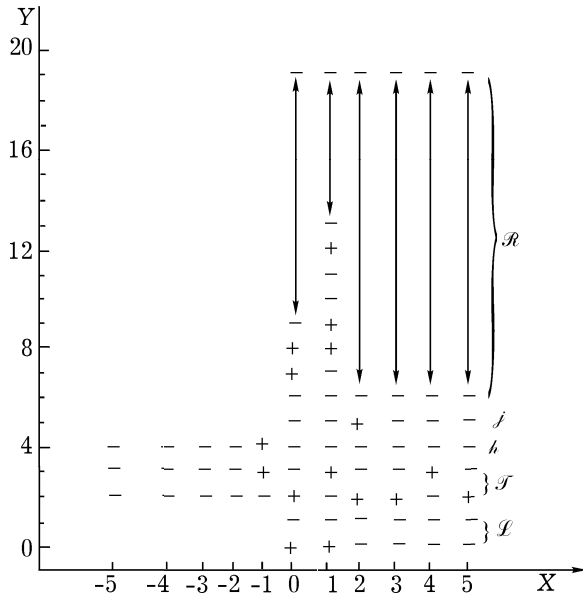


Рис. 2. Решеточная модель спиновой конфигурации для примера в тексте. Двухнаправленные стрелки означают узлы со спином, направленным вниз. Как и на предыдущем рисунке, обозначены фигурными скобками и/или рукописными буквами

Полезно привести пример явной реализации только что построенного представления. Пусть $S = (b, s_1, s_2)$, где (b, s_1, s_2) соответствуют числам $0, 1, 2$. В этом случае $m = 3$ и $l_2(m) = 2$. Пусть $J = 5$. Рисунок 2 изображает состояние решетки после двукратного применения тройки операций «запись–вычисление–j–сдвиг», которые управляются пятерками

$1(b, 1, -1)3$ и $3(b, 2, 0)5$. Конфигурация в $R_{\mathcal{L}}$, соответствующая обращенному двоичному представлению числа 5 или 1010...0, представляет внутреннюю машину \mathcal{L} в состоянии 5. Выражение на ленте \mathcal{T} , прочитанное слева направо, гласит $bbbs_2s_1s_2s_1s_1s_2s_1$. В частности, символ s_2 находящийся при $x = -1$, а s_1 — при $x = 0$ с последующими символами ($s_2s_1s_1s_2s_1$, которые произвольны), задаются как часть стандартного входа. Головка \mathbf{h} , как определено пятерками, находится в положении -1 , а головка \mathbf{j} — в положении 2, сканируя пустую клетку записи. Все клетки справа от \mathbf{j} также пусты. Протяженность подрешетки \mathcal{R} в y -направлении дается выражением $L_J^R = l_2(N_J \cdot m \cdot (2J + 1) + 1)$. Поскольку $N_J = 364$ (см. равенство (2)), то $L_J^R = 14$. Пятерки означают, что в первой и второй клетках записи находится следующее: $(1, 0, 0)$ и $(3, 0, -1)$. Значения функции Φ : $\Phi(1, 0, 0) = 2_J(6) = \dots 110$ и $\Phi(3, 0, -1) = 2_J(76) = \dots 1001100$ записаны в клетках 0 и 1 подрешетки \mathcal{R} . Это показано на рисунке 2.

3. Состояния и операторы модели

3.1. Состояния модели

Пусть $\psi_+(i, j)$ и $\psi_-(i, j)$ означают состояния «спин-вверх» и «спин-вниз» в точке решетки с координатами (i, j) . Эти состояния можно изобразить столбцами $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Пусть f — некоторая конфигурация в подрешетке R . Тогда состояние конфигурации представляется вектором

$$\Psi_f = \bigotimes_{(i,j) \in R} \psi_{f(i,j)}(i, j). \quad (7)$$

С помощью этого исходного определения можно задать состояние произвольной конфигурации. Вектор $\Psi_l^{\mathcal{L}}$, соответствующий состоянию l внутренней машины \mathcal{L} , определяется формулой (7) с $R = \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ (рис. 1). Здесь индекс l обозначает или состояние внутренней машины \mathcal{L} или соответствующую конфигурацию спинов подрешетки $R_{\mathcal{L}}$. О чем именно идет речь, обычно ясно из контекста.

Векторы состояний $\Psi_{\gamma}^{\mathcal{T}}$, $\Psi_j^{\mathbf{h}}$ и $\Psi_{\phi}^{\mathcal{R}}$ определяются аналогично. Заметим только, что в равенстве

$$\Psi_{\gamma}^{\mathcal{T}} = \bigotimes_{j=-J}^J \Psi_{\gamma(j)}^{\mathcal{T}_j} \quad (8)$$

вектор $\Psi_{\gamma(j)}^{\mathcal{T}_j}$ определен в той области $R_{\mathcal{T}_j}$ решетки, которая соответствует клетке j из \mathcal{T} и состоянию конфигурации, которая соответствует симво-

лу $\gamma(j)$, хранящемуся в клетке j из \mathcal{T} . Аналогичное определение справедливо и для вектора $\Psi_\phi^{\mathcal{R}}$. Он соответствует выражению ϕ , записанному в клетках \mathcal{R} . Конфигурация, соответствующая ϕ , определяется формулой (6). Состояния $\Psi_j^{\mathbf{h}}$ и $\Psi_k^{\mathbf{j}}$, соответствующие положению вычислительной головки у клетки j и записывающей головки у клетки k , определяются формулой (7) с $R = R_{\mathbf{h}}$ и $R = R_{\mathbf{j}}$ (рис. 1). Если \mathbf{h} находится в положении j , то $f(i, 2M) = -$ при $i \neq j$ и $f(j, 2M) = +$. При \mathbf{j} в положении k $f(i, 2M + 1) = -$, если $i \neq k$ и $f(k, 2M + 1) = +$.

Вектор состояния всей решетки для спиновой конфигурации, которая соответствует ситуации, когда внутренняя машина \mathcal{L} находится в состоянии l , \mathcal{T} содержит выражение γ , \mathcal{R} — выражение ϕ , а головки \mathbf{h} и \mathbf{j} остановились у клеток j и k , дается выражением

$$\Psi l j k \phi = \Psi_l^{\mathcal{L}} \otimes \Psi_\gamma^{\mathcal{T}} \otimes \Psi_j^{\mathbf{h}} \otimes \Psi_k^{\mathbf{j}} \otimes \Psi_\phi^{\mathcal{R}}. \quad (9)$$

Такие состояния образуют подмножество всех возможных конфигураций решетки $\Psi_f = \bigotimes (m, n) \in R_J \Psi_{f(m, n)}(m, n)$, где R_J — вся решетка, изображенная на рис. 1, а f — произвольная конфигурация из R_J .

3.2. Проекционные операторы модели

Необходимые для дальнейшего проекционные операторы также легко получаются из основных определений. Пусть, как и прежде, f — конфигурация, определенная в некоторой области решетки R . Тогда проекционный оператор, выделяющий соответствующее состояние Ψ_f , определяется формулой

$$P_f = \bigotimes_{(i, j) \in R} P_{f(i, j)}(i, j), \quad (10)$$

где проекционный оператор, определенный в спиновой системе, связанной с точкой (i, j) , равен

$$P_\pm(i, j) = \frac{1 \pm \sigma_3(i, j)}{2}. \quad (11)$$

Здесь $\sigma_3(i, j)$ — спиновая матрица Паули в узле (i, j) . Из приведенного определения следует, что для произвольно определенной в R конфигурации g

$$P_f \Psi_g = \Psi_f \delta_{f, g},$$

где $\delta_{f, g} = 1$, если $f = g$ и 0 , если $f \neq g$.

Рассуждая таким же образом, можно определить операторы $P_l^{\mathcal{L}}$ для области $R_{\mathcal{L}}$, $P_\gamma^{\mathcal{T}}$ для области $R_{\mathcal{T}}$, $P_j^{\mathbf{h}}$ для области $R_{\mathbf{h}}$, $P_k^{\mathbf{j}}$ для области $R_{\mathbf{j}}$

и $P_\phi^{\mathcal{R}}$ для области $R_{\mathcal{R}}$. Например, оператор, выделяющий выражение γ на ленте \mathcal{T} , можно записать в форме

$$P_\gamma^{\mathcal{T}} = \bigotimes_{j=-J}^{\mathcal{T}} P_{\gamma(j)j}^{\mathcal{T}}, \quad (12)$$

где $P_{\gamma(j)j}^{\mathcal{T}}$ — проекционный оператор, выделяющий символ $\gamma(j)$ в клетке j на ленте \mathcal{T} . Аналогичное разложение справедливо и для оператора $P_\phi^{\mathcal{R}}$, который ищет выражение ϕ в клетках \mathcal{R} . Заметим, что $P_l^{\mathcal{L}}$ — это проекционный оператор, позволяющий найти \mathcal{L} в состоянии $\Psi_l^{\mathcal{L}}$, хотя часто говорят о $P_l^{\mathcal{L}}$ как об операторе, который выделяет \mathcal{L} в состоянии l . Взаимная замена понятий «состояние системы» и «состояние конфигурации» происходит постоянно, но обычно будет ясно из контекста, о каком состоянии идет речь. Каждому набору $l\gamma jk\phi$, необходимому для полного описания состояния машины, соответствует вектор состояния $\Psi_{l\gamma jk\phi}$ (см. равенство (9)), который выделяется оператором

$$P_{l\gamma jk\phi} = P_l^{\mathcal{L}} \bigotimes P_\gamma^{\mathcal{T}} \bigotimes P_j^{\text{h}} \bigotimes P_k^{\text{j}} \bigotimes P_\phi^{\mathcal{R}}. \quad (13)$$

3.3. Операторы изменения конфигураций модели

Пусть f и g — две конфигурации, определенные в одной и той же области R из нашей решетки. Определим оператор σ_{fg} формулой

$$\sigma_{fg} = \bigotimes_{(i,j) \in D_{fg}} \sigma_1(i, j). \quad (14)$$

Здесь $D_{fg} = [(i, j) | f(i, j) \neq g(i, j)]$ — множество всех узлов решетки, в которых f отличается от g , а $\sigma_1(i, j)$ — оператор переворота спина в узле (i, j) . Оператор σ_1 — это матрица Паули, которая меняет друг с другом векторы ψ_+ и ψ_- . Оператор σ_{fg} меняет друг с другом векторы Ψ_f и Ψ_g , т.е. $\sigma_{fg}\Psi_f = \Psi_g$ и $\sigma_{fg}\Psi_g = \Psi_f$. Последнее свойство определяется соотношением $\sigma_1^2 = 1$, из которого следует, что $\sigma_{fg}^2 = 1$. Заметим, что $\sigma_{fg}\Psi_h \neq \Psi_h$ для всех конфигураций, область определения которых имеет непустое пересечение с D_{fg} . Если $f = g$, то D_{fg} — пустое множество и $\sigma_{fg} = 1$.

Удобно обобщить приведенную выше конструкцию и рассмотреть унитарный оператор

$$U_{fg} = e^{i\beta(f, g)} \sigma_{fg}, \quad (15)$$

где $\exp(i\beta(f, g))$ — фазовый множитель, зависящий от f и g . U_{fg} — унитарный оператор, он будет самосопряженным в том и только в том случае, если $\beta(f, g) = 0 \pmod{2\pi}$. Как хорошо известно, точное выражение $\beta(f, g)$ зависит от вида взаимодействия, которое используется для реализации оператора перестановки. Здесь оператор взаимодействия выбран в форме

$$H_{fg} = \frac{\pi\hbar}{2\Delta}\sigma_{fg}, \quad (16)$$

где Δ — произвольный промежуток времени. Тогда оператор $U_{fg}(t)$, определенный формулой

$$U_{fg} = e^{-itH_{fg}/\hbar}, \quad (17)$$

равен

$$U_{fg}(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2\Delta}\right) - i\sigma_{fg} \sin\left(\frac{\pi t}{2\Delta}\right). \quad (18)$$

В этом случае

$$U_{fg}(\Delta) = U_{fg} = -i\sigma_{fg}, \quad (19)$$

с $\beta(f, g) = 3\pi/2$ независимо от f и g . Можно выбрать и другие операторы H_{fg} , но здесь эти возможности обсуждаться не будут.

4. Зависящие от времени гамильтоновы модели

4.1. Запись, вычисление и сдвиги

В этом разделе будет построена такая модель вычисления, в которой каждый шаг процесса будет разделен на три: запись, вычисление, сдвиг. В этом случае можно распорядиться вычислениями так, что системы, состояния которых определяют, какие следует применить операторы перехода, не будут совпадать с теми системами, в которых содержатся конфигурации, подлежащие изменению. Грубо говоря, требуется, чтобы на каждом шаге вычисления проверяющие системы были бы отделены от систем, чьи состояния изменяются.

Причина этого требования кроется в том, что его результатом будет относительно простое гамильтоново описание каждого шага процесса. Это будет следствием того, что проекционные операторы, которые играют роль проверяющих операторов, коммутируют с операторами, изменяющими конфигурации системы. Этого не будет, если отнести проекционные операторы к той же самой системе, где действуют операторы изменений, что приведет к более сложному гамильтониану. Задача шага записи, выполняемой перед вычислением, состоит в том, чтобы записать в чистую

клетку записей (их будет сканировать головка \mathbf{j}) состояние внутренней машины \mathcal{L} , содержимое клетки, которую сканирует головка \mathbf{h} и положение \mathbf{h} . Шаг вычисления состоит в осуществлении в системе $\mathcal{L} + \mathcal{T} + \mathbf{h}$ операции, определяемой функцией τ_Q (уравнение (1)). Аргументами этой функции являются значения l и s , взятые из клетки, которую читает головка \mathbf{j} . Записанное положение головки \mathbf{h} используется для того, чтобы выбрать положение, в которое эта головка должна, если нужно, сместиться. Сдвиги третьего типа — это сдвиги головки \mathbf{j} к новой клетке записи.

Оператор V_1 , осуществляющий операцию записи, задается выражением

$$V_1 = \sum_{l=1}^{N_J} \sum_{s \in S} \sum_{j=-J}^J \sum_{k=0}^J P_l^{\mathcal{L}} \otimes P_{sj}^{\mathcal{T}} \otimes P_j^{\mathbf{h}} \otimes P_k^{\mathbf{j}} \otimes U_{(lsj)b}^{\mathcal{R}k} + 1 - P_1, \quad (20)$$

где

$$P_1 = \sum_{l=1}^{N_J} \sum_{s \in S} \sum_{j=-J}^J \sum_{k=0}^J P_l^{\mathcal{L}} \otimes P_{sj}^{\mathcal{T}} \otimes P_j^{\mathbf{h}} \otimes P_k^{\mathbf{j}} \otimes \mathbf{1}^{\mathcal{R}}.$$

Оператор $U_{(lsj)b}^{\mathcal{R}k}$ определяется равенством (19), в котором f и g определяются набором (lsj) и b из клетки k в \mathcal{R} . Наличие слагаемого $1 - P_1$ связано с тем обстоятельством, что в полной решетке существуют спиновые конфигурации, которые не принадлежат к тем, какие описываются равенством (9). Например, конфигурации с более чем одним (+)-спином в \mathbf{h} или \mathbf{j} подрешетках.

Ясно, что V_1 удовлетворяет поставленным условиям. Заметим, что $\mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathbf{h}, \mathbf{j}$ — это системы, которые проверяются, а \mathcal{R} — система, состояния которой изменяются. V_1 действует следующим образом: если клетка записи, содержимое которой изучила головка \mathbf{j} , пуста, то V_1 записывает в клетку состояние внутренней машины \mathcal{L} , символ на ленте \mathcal{T} , прочитанный головкой \mathbf{h} , и положение \mathbf{h} . В противном случае, т. е. если клетка записи, сканируемая \mathbf{j} , уже содержит правильную запись об изучаемом состоянии, то V_1 очищает клетку записи. Если запись в клетке, которую прочла головка \mathbf{j} , не соответствует состоянию \mathcal{L} , символу на \mathcal{T} , прочитанному \mathbf{h} , и положению \mathbf{h} , то V_1 совершает некоторые преобразования содержимого клетки записи, прочитанной \mathbf{j} . Однако явный вид этих преобразований сейчас для нас безразличен.

Математически изложенное выше выражается следующим образом:

$$V_1 \Psi_{l\gamma j k \phi} = -i \Psi_{l\gamma j k \phi'}, \quad (21)$$

где

$$\phi'(k) = (l, \gamma(j), j), \quad \text{если } \phi'(k) = b$$

и

$$\phi'(k) = b, \quad \text{если } \phi'(k) = (l, \gamma(j), j).$$

Заметим, что $\phi(h) = \phi'(h)$ для всех $h \neq k$. V_1 также изменяет $\phi(k)$, если $\phi(k)$ имеет другие значения. Однако здесь это обсуждаться не будет.

Оператор, производящий вычисления, имеет вид

$$V_2 = \sum_{l=1}^{N_J} \sum_{s \in S} \sum_{j=-J}^J \sum_{k=0}^J U_{(ls), (l's'\alpha)}^{\mathcal{L}\mathcal{T}\mathbf{h}j} \otimes P_k^{\mathbf{j}} \otimes P_{(lsj)k}^{\mathcal{R}} + 1 - P_2, \quad (22),$$

где

$$P_2 = \sum_{l=1}^{N_J} \sum_{s \in S} \sum_{j=-J}^J \sum_{k=0}^J \mathbf{1}^{\mathcal{L}\mathcal{T}\mathbf{h}} \otimes P_k^{\mathbf{j}} \otimes P_{(lsj)k}^{\mathcal{R}}$$

и слагаемое $1 - P_2$ выполняет ту же роль, что и $1 - P_1$ в равенстве (20), индексы l' , s' , α определяются по формуле (1): $\tau_Q(ls) = (l's'\alpha)$.

В силу равенства (19)

$$U_{(ls), (l's'\alpha)}^{\mathcal{L}\mathcal{T}\mathbf{h}j} = -i\sigma_{ll'}^{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{ss'}^{\mathcal{T}j} \otimes \sigma_{\alpha}^{\mathbf{h}j}. \quad (23)$$

Для оператора $\sigma_{ll'}^{\mathcal{L}}$ соответствующие конфигурации f и g определяются числами l и l' в $R_{\mathcal{L}}$ (см. рис. 1). Для $\sigma_{ss'}^{\mathcal{T}j}$ векторы f и g выделяются символами s и s' из области $R_{\mathcal{T}j}$ — множества клеток j на ленте \mathcal{T} , наконец, для $\sigma_{\alpha}^{\mathbf{h}j}$ векторы f и g опознаются по числам j и $j + \alpha$ в области $R_{\mathbf{h}}$. (Заметим, что значения $J + 1$ и $-(J + 1)$ заменяются на $-J$ и J , соответственно.) Если $\alpha = 0$, то $\sigma_{\alpha}^{\mathbf{h}j}$ — тождественный оператор.

Оператор V_2 также удовлетворяет условию, сформулированному в начале раздела, поскольку \mathcal{R} и \mathbf{j} теперь — проверяющие системы, а \mathcal{L} , \mathcal{T} и \mathbf{h} — системы, чьи конфигурации изменяются. V_2 действует так: если клетка \mathcal{R} , которую сканирует головка \mathbf{j} , содержит некоторую запись (lsj) , которая правильно представляет состояние внутренней машины \mathcal{L} , содержимое клетки в \mathcal{T} , сканируемой головкой \mathbf{h} , и положение головки \mathbf{h} , то V_2 воспроизводит вычисление в \mathcal{L} , \mathcal{T} и \mathbf{h} , в результате которого l , s и j заменяются на l' , s' и $j + \alpha$, где $\tau_Q(l, s) = (l', s', \alpha)$. Если клетка в \mathcal{R} , сканируемая головкой \mathbf{j} , содержит (lsj) , а l' — состояние внутренней машины \mathcal{L} , s' — содержимое клетки, сканируемой головкой \mathbf{h} , и j' — положение головки \mathbf{h} , связаны соотношением $\tau_Q(ls) = (l's'\alpha)$ с $j' = j + \alpha$,

то V_2 аннулирует вычисление, переводя l' в l , s' в s и j' в j . Если содержание клетки записи, сканируемой головкой \mathbf{j} , состояние внутренней машины \mathcal{L} , символ в клетке, сканируемой \mathbf{h} и положение \mathbf{h} связаны не так, как описано выше, то V_2 также изменяет состояния \mathcal{L} , \mathcal{T} и \mathbf{h} . Однако здесь эти изменения не рассматриваются.

Математически это выражается формулой

$$V_2 \Psi_{l_1 \gamma_1 j_1 k \phi} = -i \Psi_{l' \gamma' j' k \phi}. \quad (24)$$

Действие оператора V_2 можно описать следующим образом. Если для некоторого набора (l, s, j) справедлива формула $\phi(k) = (lsj)$ и $l_1 = l$, $\gamma_1(j) = s$ и $j_1 = j$, то происходит переход к $(l', \gamma'(j), \alpha)$ с $j' = j + \alpha$ и $\gamma'(h) = \gamma_1(h)$ для всех $h \neq j_1$. Если $\phi(k) = (lsj)$ и $\tau_Q(ls) = (l_1 s_1 \alpha)$, где $j_1 = j + \alpha$ и $\gamma_1(j_1) = s_1$, то происходит обратный шаг $l' = l$, $\gamma'(j_1) = s$, $j' = j$ и $\gamma'(k) = \gamma_1(k)$ для всех $k \neq j_1$. Естественно, что V_2 вызывает и другие изменения.

Оператор сдвига определяется формулой

$$V_3 = \sum_{k=0}^J \mathbf{I}^{\mathcal{L} \mathcal{T} \mathbf{h}} \otimes U_{+1}^{\mathbf{j}k} \otimes P_k^{\mathcal{R}} + 1 - P_3, \quad (25)$$

где

$$P_3 = \sum_{k=0}^J \mathbf{I}^{\mathcal{L} \mathcal{T} \mathbf{h} \mathbf{j}} \otimes P_k^{\mathcal{R}}.$$

Оператор $P_k^{\mathcal{R}}$ проецирует на такие состояния решетки записи, у которых k -я клетка \mathcal{R} — это последняя (в направлении возрастания k) непустая клетка. Его можно определить формулой $P_k^{\mathcal{R}} = \sum_{\phi}^k P_{\phi}^{\mathcal{R}}$, где индекс k у знака суммы по ϕ означает что суммирование ограничено такими ϕ , что $\phi(k) \neq b$ и $\phi(j) = b$ для всех j , удовлетворяющих неравенствам $k < j \leq J$.

Справедливо

$$V_3 \Psi_{l \gamma j k \phi} = -i \Psi_{l' \gamma j' k' \phi}, \quad (26)$$

где $k' = k + 1$, если k — последняя заполненная клетка в ϕ и $k' = k - 1$ если $k - 1$ — последняя заполненная клетка в ϕ . (Заметим, что $k + 1 = 0$, если $k = J$ и $k - 1 = J$, если $k = 0$.)

Можно показать, что унитарные операторы V_1, V_2, V_3 , применяемые один за другим к подходящему начальному состоянию $\Psi_{1 \gamma_0 0 \underline{b}}$ порождает желаемые шаги процесса. Здесь 1 обозначает (стандартное) начальное состояние внутренней машины \mathcal{L} , а \underline{b} означает, что все клетки в \mathcal{R} пустые.

В частности, если $m \leq J$, то $(V_3 V_2 V_1)^m \Psi_{1\gamma 00\bar{b}}$ — состояние, соответствующее выполнению m вычислительных шагов. Детали состояния модели при $m > J$ описаны в разделе 6.1.

4.2. Зависящие от времени гамильтонианы

Нашей целью является построение для любой машины Тьюринга такого модельного решетчатого гамильтониана, что шредингера эволюция выделенных состояний будет моделировать первые J шагов вычисления на этой машине. Для этого выберем подходящий промежуток времени Δ и гамильтониан H

$$\begin{aligned} H &= H_1 && \text{если} && 3m\Delta \leq t < (3m+1)\Delta \\ H &= H_2 && \text{если} && (3m+1)\Delta \leq t < (3m+2)\Delta \\ H &= H_3 && \text{если} && (3m+2)\Delta \leq t < (3m+3)\Delta \end{aligned} \quad (27)$$

для любого целого m . Гамильтонианы H_1 , H_2 и H_3 должны быть выбраны так, чтобы выполнялись соотношения ($\hbar = 1$)

$$V_j = e^{-i\delta H_j} \quad (28)$$

для $j = 1, 2, 3$.

Ясно, что определенный так гамильтониан зависит от времени и требует внешнего вмешательства для переключения соответствующих взаимодействий. Однако он приводит к желанному закону эволюции. Чтобы убедиться в этом, будем считать, что $t = (3m + h)\Delta$, где $h = 0, 1$ или 2 . Тогда, если вся решетка находится в начальный момент в состоянии Ψ , вектор $\Psi(t)$ определится формулой

$$\Psi(t) = e^{-iHt} \Psi = e^{-iH_{h+1}\Delta} \dots e^{-iH_1\Delta} (e^{-iH_3\Delta} e^{-iH_2\Delta} e^{-iH_1\Delta})^m \Psi. \quad (29)$$

Из предыдущего ясно, что для $t = (3m + h)\Delta$, где $m \leq J$, оператор $\exp(-iHt)$, примененный к вектору $\Psi_{1\gamma 00\bar{b}}$, порождает состояние модели, соответствующее состоянию машины Тьюринга и системы записи после $3m + h$ шагов вычисления. Если $m > J$, то состояние $\Psi(t)$ по-прежнему определяется формулой (29), но модель более не описывает эволюцию «запись–вычисление–сдвиг» машины Тьюринга. Гамильтониан, описывающий запись, можно взять в форме

$$H_1 = \sum_{l=1}^{N_J} \sum_{s \in S} \sum_{j=-J}^J \sum_{k=0}^J P_l^{\mathcal{L}} \otimes P_{sj}^{\mathcal{F}} \otimes P_j^{\mathbf{h}} \otimes P_k^{\mathbf{j}} \otimes H_{(lsj)b}^{\mathcal{R}k}, \quad (30)$$

где $H_{(lsj)b}^{\mathcal{R}k}$ определяются равенством (16), в котором конфигурации f и g определяются числами (lsj) и b из клетки k системы записи. Оператор H_2 равен

$$H_2 = \sum_{l=1}^{N_J} \sum_{s \in S} \sum_{j=-J}^J \sum_{k=0}^J H_{(ls), (l's'\alpha)}^{\mathcal{L} \mathcal{T} \mathbf{h} j} \otimes P_k^{\mathbf{j}} \otimes P_{(lsj)k}^{\mathcal{R}}. \quad (31)$$

Из равенства (16) следует, что

$$H_{(ls), (l's'\alpha)}^{\mathcal{L} \mathcal{T} \mathbf{h} j} = \frac{\pi \hbar}{2\Delta} \sigma_{ll'}^{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{ss'}^{\mathcal{T} j} \otimes \sigma_{\alpha}^{\mathbf{h} j}, \quad (32)$$

где конфигурации f и g определяются числами l и l' в системе \mathcal{L} , s и s' в j -й клетке \mathcal{T} и положением \mathbf{h} в j и $j + \alpha$.

Для каждых значений l и s величины l' , s' и α определяются функцией τ_Q (см. равенство (1)). Если $\tau_Q(ls) = (ls0)$, то $H_{(ls), (l's'\alpha)}^{\mathcal{L} \mathcal{T} \mathbf{h} j} = \pi \hbar / 2\Delta$. В этом случае конфигурации \mathcal{L} , \mathcal{T} и \mathbf{h} не изменяются.

Оператор H_3 можно представить в форме

$$H_3 = \sum_{k=0}^J H_{+1}^{\mathbf{j} k} \otimes P_k^{\mathcal{R}}, \quad (33)$$

где $H_{+1}^{\mathbf{j} k}$ определяется равенством (16) с конфигурациями f и g , относящимися к положениям k и $k + 1 \pmod{J + 1}$ головки \mathbf{j} .

Легко проверить, что подстановка только что определенных операторов H_1 , H_2 и H_3 в уравнения (28) приводит к равенствам (20), (22) и (25). Это является следствием попарной ортогональности слагаемых в суммах по l , s , j и k .

Если значение $t = (3m + h)\Delta + \delta$ не кратно Δ , то $\exp(-iHt)$ можно представить как $\exp(-iH_{h+1}\delta) \exp(-iH(3m + h)\Delta)$, где $h = 0, 1$ или 2 . Действие $\exp(-iH(3m + h)\Delta)$, определяется равенством (20), в котором $U_{(lsj)b}^{\mathcal{R}k}$ заменяется на $\exp(-iH_{(lsj)b\delta}^{\mathcal{R}k})$. Это выражение в свою очередь определяется равенствами (17) и (18), где f и g задаются конфигурациями (lsj) и b в клетке k из \mathcal{R} .

При $h = 1$ оператор $\exp(-iH_2\delta)$ определяется равенством (22), в котором $U_{(ls), (l's'\alpha)}^{\mathcal{L} \mathcal{T} \mathbf{h} j}$ заменены на

$$\exp(-iH_{(ls), (l's'\alpha)}^{\mathcal{L} \mathcal{T} \mathbf{h} j}) = \cos\left(\frac{\pi\delta}{2\Delta}\right) - i(\sigma_{ll'}^{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{ss'}^{\mathcal{T} j} \otimes \sigma_{\alpha}^{\mathbf{h} j}) \sin\left(\frac{\pi\delta}{2\Delta}\right) \quad (34)$$

(см. равенство (18)). Для $h = 3$ оператор $\exp(-iH_3\delta)$ получается из равенства (25), в котором $U_{+1}^{\mathbf{j} k}$ заменены на $\exp(-iH_{+1}^{\mathbf{j} k}\delta)$. В силу равенства (18) снова получается приведенное выше выражение.

Определенный выше гамильтониан довольно прост, что позволяет непосредственно проследить за его работой. Однако недостатком этого оператора является его явная зависимость от времени. Это требует некоторого внешнего вмешательства для применения полного гамильтониана, как это определяется равенством (27).

Желательно построить модель процесса, в которой гамильтониан не зависел бы от времени. Преимуществом такой модели была бы ее полная независимость, не требующая внешнего вмешательства.

5. Гамильтонианы, не зависящие от времени

Метод, который будет применен для построения модели с гамильтонианом, не зависящим от времени, основан на следующем наблюдении. В приведенной выше конструкции происхождение зависимости от времени скрывалось в необходимости последовательных изменений типа гамильтониана, чтобы за время Δ совершилось три превращения, вызываемые операторами V_1 , V_2 и V_3 . Однако нет причин, по которым эволюция системы не может ускориться так, чтобы за интервал Δ выполнялась бы операция V , объединяющая все три шага — запись, вычисление и сдвиг. Чтобы осуществить это, нужно построить унитарный оператор V , который в терминах чисел $(l\gamma jk\phi)$ действовал бы следующим образом:

$$V\Psi_{l\gamma jk\phi} = \Psi_{l'\gamma'j'k'\phi'}, \quad (35)$$

где $\Psi_{l\gamma jk\phi}$ и $\Psi_{l'\gamma'j'k'\phi'}$ связаны соотношением

$$V_3V_2V_1\Psi_{l\gamma jk\phi} = \Psi_{l'\gamma'j'k'\phi'}. \quad (36)$$

Связь между штрихованными и нештрихованными величинами в уравнении (36) определяется равенствами (21), (24) и (26). Детали соответствующего вывода предоставляются читателю. Заметим только, что если пятерки $(l\gamma jk\phi)$ описывают состояние (стандартной) машины Тьюринга в конце n -го шага стандартного вычисления ($n < J$), то $(l'\gamma'j'k'\phi')$ описывает состояние машины в конце $(n + 1)$ -го шага. Существует много конфигураций $(l\gamma jk\phi)$, не соответствующих ни одному из состояний машины Тьюринга. Кроме того, в силу построений раздела 2 существуют конфигурации f , которые нельзя представить каким-нибудь набором $(l\gamma jk\phi)$. В качестве примера приведем конфигурацию, в которой головка j записала более чем один (+)-спин. В таких конфигурациях оператор V может сводиться к тождественному, а может и не быть им — все зависит от конфигурации.

Рассмотрим некоторый вектор $\Psi_{1\gamma 00\underline{b}}$, который представляет начальное состояние стандартного вычисления (раздел 3). Пусть N_γ — некоторое число, определяемое условием $V^{N_\gamma} \Psi_{1\gamma 00\underline{b}} = \Psi_{1\gamma 00\underline{b}}$. Такое число существует, потому что V — унитарный оператор, а множество конфигураций на решетке конечно. Определим орбиту V при $\Psi_{1\gamma 00\underline{b}}$ как множество состояний $[V^n \Psi_{1\gamma 00\underline{b}} | n = 0, 1, \dots, N_\gamma - 1]$. Для каждого γ существует орбита длины N_γ . В результате J итераций оператора V , примененных к вектору $\Psi_{1\gamma 00\underline{b}}$ соответствуют выполнению J вычислительных шагов машину Тьюринга. Продолжение итераций V вплоть до N_γ разрушает представление, т. к. получающиеся состояния не соответствуют состояниям, получаемым при вычислении. Однако эффектом продолжения итераций является уничтожение записей и результатов вычисления, потому что приходит в конце концов к начальному состоянию.

Кроме перечисленных выше, существует много других нетривиальных орбит. Любую конфигурацию решетки f , для которой Ψ_f не содержится в уже построенных орбитах, можно использовать для создания новых орбит. Применяя эту процедуру, можно исчерпать запас состояний конфигураций решетки и найти все орбиты оператора V . Все сказанное легко перевести на язык стандартного пространства Гильберта. Гильбертово пространство решетки \mathcal{H} , натянутое на все состояния конфигураций, можно разложить на множество замкнутых подпространств, которые нетривиальны и неприводимы относительно оператора V и находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами. Каждое подпространство натянуто на состояния соответствующей орбиты. В частности, для каждого стандартного выражения на ленте γ существует подпространство \mathcal{H}_γ , натянутое на $[V^n \Psi_{1\gamma 00\underline{b}} | n = 0, 1, \dots, N_\gamma - 1]$.

Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_N$ — это все V -инвариантные неприводимые подпространства, а P_1, P_2, \dots, P_N — проекционные операторы, выделяющие эти подпространства. Оператор V можно представить в форме

$$V = \sum_{j=1}^N V_j P_j,$$

где $V_j \mathcal{H}_j = \mathcal{H}_j = P_j \mathcal{H}$ и $[V_j, P_j] = 0$. Нас интересуют подпространства \mathcal{H}_γ с проекционными операторами P_γ и сужения V_γ оператора V на \mathcal{H}_γ . Для этой цели определим другой оператор W :

$$W = \sum_{\gamma} V_\gamma P_\gamma + \left(1 - \sum_{\gamma} P_\gamma \right), \quad (37)$$

где сумма берется по всем возможным при стандартном вычислении начальным выражениям на ленте. W -унитарный оператор, совпадающий с V на подпространствах \mathcal{H}_γ и действующий как единичный в других областях.

Наша цель — построить полный гамильтониан \mathcal{H} , удовлетворяющий соотношению

$$W = e^{-i\Delta\mathcal{H}}. \quad (38)$$

Для этого полезно найти в каждом подпространстве \mathcal{H}_γ собственные значения и собственные векторы оператора V_γ . (Излагаемый метод един для всех конечномерных пространств и его можно применить к любому оператору V_j из разложения V).

Фиксируем γ и рассмотрим векторы $\Psi_0^\gamma, \Psi_1^\gamma, \dots, \Psi_{N_\gamma-1}^\gamma$ в \mathcal{H}^γ , определяемые равенствами $\Psi_n^\gamma = V^n \Psi_{1\gamma 00b}$ для $n = 0, 1, \dots, N_\gamma - 1$. Для $n \leq J$ вектор Ψ_n представляет состояние машины Тьюринга после n шагов вычисления. Очевидно, что

$$V_\gamma \Psi_n^\gamma = \Psi_{n+1}^\gamma, \quad (39)$$

с тем уточнением, что если $n = N_\gamma - 1$, то $n + 1$ следует положить равным 0.

Вышеприведенное показывает, что V_γ — это оператор двустороннего сдвига в \mathcal{H}_γ . Поскольку пространство \mathcal{H}_γ конечномерно, то спектр V_γ чисто дискретен. Собственные значения и собственные векторы таких операторов известны. Собственные значения V_γ — N_γ -корни из единицы — $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N_\gamma-1}$, определяемые формулой

$$\alpha_l = \exp\left(-\frac{2\pi il}{N_\gamma}\right) \quad (40)$$

Собственные векторы $\Phi_0^\gamma, \Phi_1^\gamma, \dots, \Phi_{N_\gamma-1}^\gamma$ определяются выражениями

$$\Phi_l^\gamma = \frac{1}{\sqrt{N_\gamma}} \sum_{j=0}^{N_\gamma-1} (\alpha_l)^{-j+1} \Psi_j^\gamma. \quad (41)$$

Ясно, что

$$V_\gamma \Phi_l^\gamma = \alpha_l \Phi_l^\gamma.$$

Гамильтониан H должен удовлетворять равенствам (37) и (38). Потребуем, чтобы его можно было представить в форме

$$H = \sum_{\gamma} H_\gamma \quad (42)$$

где для каждого стандартного выражения γ на вычислительной ленте оператор H_γ действует нетривиально только в пространстве \mathcal{H}_γ и равен нулю в других областях. Кроме того, должно выполняться равенство $V_\gamma = \exp(-iH_\gamma\Delta)$. В этом случае для всех t $W(t) = \exp(-iHt)$ удовлетворяет равенству

$$W(t) = \sum_{\gamma} e^{-iH_\gamma t} P_\gamma + 1 \left(1 - \sum_{\gamma} P_\gamma \right), \quad (43)$$

т. к. $H_\gamma H_{\gamma'} = 0$ при $\gamma \neq \gamma'$.

Можно определить различные гамильтонианы H_γ , удовлетворяющие равенству $\exp(-i\Delta H_\gamma) = V_\gamma$. Вот один из таких операторов:

$$H_\gamma = \sum_{l=0}^{N_\gamma-1} \frac{2\pi}{\Delta} \frac{l}{N_\gamma} Q_l^\gamma, \quad (44)$$

где Q_l^γ — оператор проектирования на собственный вектор Φ_l^γ . Заметим, что оператор $H_\gamma = \sum_{l=0}^{N_\gamma-1} 2\pi/\Delta (l/N_\gamma + n_l^\gamma) Q_l^\gamma$, где n_l^γ — произвольное целое число, также согласуется с условиями (37) и (38). Равенство (44) — простейшая из всех возможностей: $n_l^\gamma = 0$ для всех l и γ . Пусть $V_\gamma(t) = \exp(-iH_\gamma t)$ — оператор сдвига во времени для гамильтониана H_γ , определенного равенством (44). Тогда

$$V_\gamma = \sum_{l=0}^{N_\gamma-1} \exp \frac{-2\pi i l t}{N_\gamma \Delta} Q_l^\gamma \quad (45)$$

Формулы (44) и (45) задают гамильтониан H_γ и оператор сдвига во времени $V_\gamma(t)$ в терминах собственных векторов Q_l^γ . Удобно выразить $V_\gamma(t)$ и H_γ непосредственно в терминах проекционных и обменных операторов в спиновом конфигурационном пространстве. Используя равенства (40) и (41), можно представить проекционные операторы Q_l^γ как

$$Q_l^\gamma = \frac{1}{N_\gamma} \sum_{j,k=0}^{N_\gamma-1} \exp \left(\frac{-2\pi i l}{N_\gamma} (j - k) \right) \Psi_j^\gamma \Psi_k^\gamma \quad (46)$$

Заметим, что

$$\Psi_j^\gamma \Psi_k^\gamma = \sigma_{jk} P_k^\gamma, \quad (47)$$

где σ_{jk} — оператор перестановки конфигураций j и k , определенный равенством (14). Конфигурации j и k , которые соответствуют состоянию системы при j -м и k -м шагах вычисления, определены во всей решетке, изображенной на рис. 1, P_k^γ — оператор проектирования на состояние Ψ_k^γ . С помощью равенств (46) и (47) гамильтониан можно представить так:

$$H_\gamma = \sum_{j,k=0}^{N_\gamma-1} d_{jk} \sigma_{jk}^\gamma P_k^\gamma, \quad (48)$$

где коэффициенты d_{jk} равны

$$d_{jk} = \sum_{l=0}^{N_\gamma-1} \frac{2\pi l}{\Delta N_\gamma^2} \exp \frac{2\pi i l (j - k)}{N_\gamma}. \quad (49)$$

Оператор сдвига во времени равен

$$V_\gamma(t) = \sum_{j,k=0}^{N_\gamma-1} b_{jk}(t) \sigma_{jk}^\gamma P_k^\gamma, \quad (50)$$

где коэффициенты b_{jk} определяются формулой

$$b_{jk}(t) = \frac{1}{N_\gamma} \sum_{l=0}^{N_\gamma-1} \exp \left(-\frac{2\pi i l}{N_\gamma} \left(\frac{t}{\Delta} + k - j \right) \right). \quad (51)$$

Ясно, что определенный равенствами (42) и (44) или (48) гамильтониан обладает ожидаемыми свойствами. Он не зависит от времени. Закон эволюции начального состояния $\Psi(t) = \exp(-iHt) \Psi_{1\gamma 00b}$ таков, что вектор состояния в момент времени $t = n\Delta$, $\Psi(n\Delta) = \Psi_n^\gamma$ соответствует конфигурации системы после n шагов вычисления. (Заметим, что $\Psi_{1\gamma 00b} = \Psi_0^\gamma$.) Это следует из того обстоятельства, что в силу (51) числа $b_{jk}(n\Delta)$ равны нулю, если $n \pmod{N_\gamma} + k - j = 0$ или N_γ . В двух последних случаях $b_{jk}(n\Delta) = 1$. Для $t = N_\gamma \Delta$ — времени завершения цикла для каждого состояния из \mathcal{H}_γ справедливо равенство $W(N_\gamma \Delta) \Psi_n^\gamma = \Psi_n^\gamma$ для каждого $n < N_\gamma$. Таким образом, если начать вычисление в момент времени $t = 0$, выйдя из начального состояния $\Psi_{1\gamma 00b}$, то в момент $N_\gamma \Delta$ мы вернемся в начальное состояние.

Действие $W(t)$ на состояния за промежуток времени, не кратный Δ , определяется формулой (50). В частности, пусть $t = n\Delta + \delta$, где $0 \leq \delta \leq 1$.

Тогда $W(t)$ (или, что эквивалентно, $V_\gamma(t)$), действуя на $\Psi_{1\gamma 00b}$, дает

$$\Psi(n\Delta + \delta) = \sum_{m=0}^{N_\gamma-1} b_{m-n}(\delta) \Psi_m^\gamma. \quad (52)$$

Здесь было использовано (см. (51)) соотношение $b_{m_0}(n\Delta + \delta) = b_{mn}(\delta) = b_{m-n}(\delta)$.

6. Характеристики моделей

6.1. Представление вычислений

Пришло время для более детального обсуждения некоторых аспектов зависящей и не зависящей от времени моделей. Они устроены так, что три шага модели, зависящей от времени, соответствуют одному шагу модели, от времени не зависящей. В частности, состояние Ψ_n^γ , которое появляется в момент $n\Delta$ в независящей от времени модели, начавшей свои вычисления в состоянии Ψ_0^γ в момент 0, в зависящей от времени модели достигается за время $3n\Delta$. Более того, это справедливо для всех n .

Обе модели описывают J первых вычислительных шагов машины Тьюринга. Если вычисление останавливается через $m < J$ шагов, обе модели повторяют в клетках записи $m + 1, m + 2, \dots, J$ одну и ту же, уже записанную в клетке m тройку — состояние внутренней машины \mathcal{L} , содержимое клетки ленты \mathcal{I} , изучаемое головкой \mathbf{h} , положение головки \mathbf{h} . Состояния \mathcal{L} , \mathcal{I} , и \mathbf{h} стационарны для всех значений времени $n\Delta$, где $m \leq n \leq J$ (не зависящие от времени гамильтонианы) или $3m \leq n \leq 3J$ (зависящие от времени гамильтонианы), как и должно быть при законченном вычислении.

Если $J < m < N_\gamma$, то для значений времени $n\Delta$ и для не зависящих от времени гамильтонианов первоначально справедливое представление разрушается, и состояния конфигураций модели уже не соответствуют, вообще говоря, никакому состоянию вычисления. Ясно, однако, что записи в это время стираются, потому что в моменту $N_\gamma\Delta$ вся система оказывается в начальном состоянии. Эту фазу работы можно определить как фазу возвращения. Если необходимо, ее можно сделать в точности обратной к прямой фазе вычисления, как это происходит в модели, построенной Беннетом [2]. Соответствующие квантовомеханические модели, которые выглядят более сложно, чем представленные здесь, описаны в [15]. Все сказанное выше справедливо и для моделей с зависящим от времени гамильтонианом при $3J < n < 3N_\gamma$.

6.2. Локальность во времени

Представляет определенный интерес и поведение наших моделей в те времена, которые не кратны Δ . Рассмотрим некоторую систему, которая изменяется от состояния n в момент времени $n\Delta$ до состояния $n+1$ в момент времени $(n+1)\Delta$. Вообще говоря, может оказаться, что во времена $n\Delta + \delta$, $0 \leq \delta \leq \Delta$, система будет обнаружена в состоянии n с конечной, зависящей от времени вероятностью $P_n(\delta)$ и в состоянии $n+1$ с вероятностью $P_{n+1}(\delta)$. Более того, можно ожидать, что если δ возрастает с 0 до Δ , то $P_n(\delta)$ убывает с 1 до 0, а $P_{n+1}(\delta)$ возрастает с 0 до 1, так что $P_n(\delta) + P_{n+1}(\delta) = 1$ для всех t из области $n\Delta \leq t \leq (n+1)\Delta$. Результатом этих рассуждений будет ожидание того, что мы не найдем систему в состоянии, которое уже было пройдено несколько шагов назад или в том состоянии, которое должно появиться только через несколько шагов.

Чтобы придать этим рассуждениям точный смысл, обратимся к квантовой механике. Для определенности назовем систему *локальной во времени*, если для каждого n всех $t = n\Delta$, $0 \leq \delta \leq 1$, вектор состояния системы $\Psi(t)$ есть линейная комбинация только двух векторов Ψ_n и Ψ_{n+1} , т. е.

$$\Psi(n\Delta + \delta) = \alpha_n(\delta)\Psi_n + \beta_n(\delta)\Psi_{n+1}. \quad (53)$$

Здесь Ψ_n и Ψ_{n+1} — ортогональные состояния, в которых система находится в моменты времени $n\Delta$ и $(n+1)\Delta$. Коэффициенты $\alpha_n(\delta)$ и $\beta_n(\delta)$ — комплексные числа, удовлетворяющие условиям $|\alpha_n(\delta)|^2 + |\beta_n(\delta)|^2 = 1$ и $\alpha_n(0) = \beta_n(\Delta) = 1$, $\alpha_n(\Delta) = \beta_n(0) = 0$. В частности, $\Psi(t)$ не содержит составляющих Ψ_m для $m < n$ (эти индексы соответствуют уже пройденным состояниям) или для $m > n+1$ (эти состояния будут достигнуты в будущем).

Возможен случай, когда для некоторого числа n система не будет локальной во времени. Это означает, что кроме состояний Ψ_n и Ψ_{n+1} в линейной суперпозиции появляются состояния Ψ_m с $m \neq n, n+1$ с коэффициентами $\gamma(m) \neq 0$. Сколь много таких состояний нужно принять во внимание, зависит от величины модуля $|\gamma_m(\delta)|$.

Если система и ассоциированный с ней гамильтониан таковы, что для каждого n и по крайней мере для некоторых значений времени $t = n\Delta + \delta$, $0 < \delta < \Delta$, состояние $\Psi(t)$ будет линейной суперпозицией всех возможных состояний Ψ_m с ненулевыми коэффициентами $\gamma_{nm}(\delta)$, то систему называют *глобальной во времени*. Причина употребления такого термина состоит в том, что пока система эволюционирует из состояния Ψ_n в момент t_n к состоянию Ψ_{n+1} , полное состояние $\Psi(t)$ содержит составляющие, которые

соответствуют всем состояниям, которые будут или уже были достигнуты как в в прошлом, так и в будущем.

Эти понятия можно применить к построенным здесь моделям. Из равенства (53) следует, что модели, построенные на основе не зависящего от времени гамильтониана, глобальны во времени. В частности, как можно понять из соображений непрерывности и дифференцируемости, коэффициенты $b_{m-n}(\delta)$ должны быть отличны от нуля для большинства (т. е. для всех, кроме, может быть, некоторых изолированных точек) значений δ между 0 и Δ . Это означает, что когда состояние машины Тьюринга переходит от Ψ_n^γ в момент $n\Delta$ к состоянию Ψ_{n+1}^γ в момент $(n+1)\Delta$ полная система находится в суперпозиции как первых J шагов вычисления, так и предстоящих $N_\gamma - J$ шагов. Выражаясь несколько вольно, можно сказать, что состояние системы $\Psi(t)$, начав в момент времени $n\Delta$ с некоторого состояния Ψ_n^γ , по мере возрастания t расширяется до суперпозиции всех прошлых и будущих состояний на орбите, а затем, к моменту $t = (n+1)\Delta$, коллапсирует к состоянию Ψ_{n+1}^γ (смысл термина «коллапс» здесь не совпадает со смыслом термина «коллапс волновой функции» в теории измерений).

Модели с зависящим от времени гамильтонианом отличаются от моделей с постоянным гамильтонианом тем, что они локальны во времени. Обратившись к разделу 4.2, можно понять, что для каждого n и всех $n\Delta + \delta$, $0 \leq \delta \leq \Delta$ удовлетворено равенство (53) с $\alpha_n(\delta) = \cos(\pi\delta/2\Delta)$ и $\beta_n(\delta) = -i \sin(\pi\delta/2\Delta)$, причем $\alpha_n(\delta)$ и $\beta_n(\delta)$ не зависят от n . Функции $\Psi_n = \Psi(n\Delta)$ и $\Psi_{n+1} = \Psi((n+1)\Delta)$ определяются равенством (29), в котором m и h удовлетворяют $n = 3m + h$, $h = 0, 1$ или 2 . Таким образом, для всех значений времени $n\Delta + \delta$, $0 \leq \delta \leq \Delta$ единственными состояниями, дающими вклад в состояние $\Psi_{(n\Delta+\delta)}^\gamma$, являются Ψ_n^γ и Ψ_{n+1}^γ , которые соответствуют только что законченной и непосредственно следующей за ней стадиям вычислительного процесса.

Локальность во времени рассмотренной здесь зависящей от времени модели приводит к другому важному следствию. Рассмотрим эволюцию сложной системы, распределенной в некоторой области пространства. Интуитивно можно предположить, что во время эволюции изменения происходят в системах из одной подобласти, а состояния систем в остальной части области остаются стационарными. Как скоро процесс изменения перемещается в другую подобласть и какие системы оказываются вовлеченными в него — зависит от деталей процесса.

Процесс вычисления на машине Тьюринга очень хорошо описывается в этих терминах. Например, вначале k -я клетка записи пуста и остает-

ся пустой при любых изменениях в других частях системы. Состояние этой клетки изменится только в том случае, когда в ней запишут соответствующую тройку. После этого оно снова пребудет неизменным, пока эта запись не сотрется. Аналогичные периоды изменений, сменяемые периодами стационарности, происходят и в других частях системы.

Уместно заметить, что состояния различных подсистем обладают этим свойством именно благодаря локальности во времени, которая обеспечивается изменением во времени гамильтониана системы. Например, состояние подсистемы, соответствующее пустоте k -й клетки записи, остается неизменным для всех t от нуля до $3k\Delta$. За время, текущее между $3k\Delta$ и $(3k+1)\Delta$, клетка записи меняет свое состояние $\Psi_b^{\mathcal{R}^k}$ на $\Psi_{lsj}^{\mathcal{R}^k}$ с некоторой тройкой lsj . Это состояние остается неизменным до момента времени $t = 3J\Delta$. Для промежутка времени $3J\Delta < t < 3N_\gamma\Delta$ стационарность состояния зависит от деталей фазы обращения. Известно только, что в некоторый момент времени $q\Delta$ состояние k -й клетки возвращается к $\Psi_b^{\mathcal{R}^k}$ и в дальнейшем не изменяется.

В моделях с не зависящим от времени гамильтонианом дело обстоит иначе, потому что они глобальны во времени. В частности, из равенства (53) следует, что для каждого n в промежутке времени от $n\Delta$ до $(n+1)\Delta$ изменяется состояние каждой подсистемы. Если конфигурация подсистемы одинакова перед n -м и $(n+1)$ -м шагами, то состояние подсистемы одно и то же для времен $n\Delta$ и $(n+1)\Delta$. Однако оно будет изменяться при промежуточных временах¹.

Масштаб изменений в состоянии любой подсистемы при возрастании t от $n\Delta$ до $(n+1)\Delta$ зависят, главным образом от значений коэффи-

¹Состояние любой модельной подсистемы X в момент времени $n\Delta + \delta$ задается, вообще говоря, оператором плотности $\rho^X(n\Delta + \delta)$, причем в силу равенства (52)

$$\rho^X(n\Delta + \delta) = \sum_j \sum_{m, m'}^j b_{m-n}(\delta) b_{m'-n}^*(\delta) \text{Tr}_{-X}(|\Psi_m^\gamma\rangle\langle\Psi_{m'}^\gamma|).$$

Индекс $-X$ означает, что след берется по всем спиновым системам, не принадлежащим X . Сумма по j распространяется на все непересекающиеся подмножества N_γ конфигураций, определенные таким образом, что все конфигурации внутри каждого подмножества тождественны вне X и любые две конфигурации с различными подмножествами различны вне X . Сумма по m, m' распространяется на все пары конфигураций внутри j -го подмножества. Если подмножество j содержит только одну конфигурацию h , то вклад суммы по m, m' в оператор плотности равен $|b_{h-n}(\delta)|^2 P_{h|X}^X$, где $P_{h|X}^X$ — оператор проектирования на состояния конфигурации $J_{h|X}^X$ на X и $h|X$ — ограничение h на X .

циентов $b_{m-n}(\delta)$ для всех значений m , при которых конфигурации подсистемы в состоянии Ψ_m^γ отличаются от таковых в состоянии Ψ_n^γ .

Важным параметром здесь является временной промежуток или число шагов из n до шага, при котором состояние конфигурации изменяется. Например, конфигурация k -й клетки записи изменится во время шага под номером $k+1$ от b до подходящей тройки lsj . Следующее изменение происходит во время шага, осуществляемого после J -го, когда происходит процесс возвращения. На q -м шаге k -я клетка записи возвращается в состояние b и остается в этом состоянии на каждом из $N_\gamma - q$ шагов.

Состояние k -й клетки записи в момент $n\Delta + \delta$, определяемое оператором плотности $\rho^{\mathcal{R}k}(n\Delta + \delta)$, соответствует вышеописанному. В частности,

$$\begin{aligned} \rho^{\mathcal{R}k}(n\Delta + \delta) = & \\ = & \left(\sum_{m=0}^k + \sum_{m=q}^{N_\gamma-1} \right) [|b_{m-n}(\delta)|^2] P_b^{\mathcal{R}k} + \sum_{m=k+1}^J |b_{m-n}(\delta)|^2 P_{lsj}^{\mathcal{R}k} + \\ & + \sum_{m', m=J+1}^{q-1} b_{m'-n}^*(\delta) b_{m-n}(\delta) \text{Tr}'(|\Psi_m^\gamma\rangle\langle\Psi_{m'}^\gamma|). \end{aligned} \quad (54)$$

В этой формуле lsj обозначает подходящую тройку, занесенную в k -ю клетку записи, а $P_b^{\mathcal{R}k}$ и $P_{lsj}^{\mathcal{R}k}$ — соответствующие проекционные операторы на состояния $\Psi_b^{\mathcal{R}k}$ и $\Psi_{lsj}^{\mathcal{R}k}$. Штрих у символа следа означает, что при его вычислении исключаются переменные, относящиеся к k -й клетке.

Из приведенного выше равенства и свойств коэффициентов $b_{m-n}(\delta)$ следует, что при $\delta = 0$ матрица плотности $\rho^{\mathcal{R}k}(n\delta)$ равна $P_b^{\mathcal{R}k}$, если $0 \leq n \leq k$, или $q \leq n \leq N_\gamma$ и $\rho^{\mathcal{R}k}(n\delta) = P_{lsj}^{\mathcal{R}k}$, если $k < n \leq J$. В эти моменты времени (кратные Δ) приведенные выше квантовые состояния — чистые и описываются векторами $\Psi_b^{\mathcal{R}k}$ и $\Psi_{lsj}^{\mathcal{R}k}$. В моменты времени $n\Delta + \delta$, $0 < \delta < \Delta$ матрица плотности $\rho^{\mathcal{R}k}(n\Delta + \delta)$ описывает смесь чистых состояний $P_b^{\mathcal{R}k}$ и $P_{lsj}^{\mathcal{R}k}$, а также других состояний, которые могут внести вклад в правую часть равенства (54). Если $0 \leq n \leq k$ или $q \leq n < N_\gamma$, в смеси доминирует оператор $P_b^{\mathcal{R}k}$. Много ли других составляющих входит в смесь, зависит от величины δ и расстояния $m - n$ для всех $k+1 < m < q-1$ или от того, сколь далеко расположены числа m от n . Аналогичные вопросы возникают и разрешаются при $k+1 \leq n \leq J$.

6.3. Сложность гамильтонианов

Только что изученные гамильтонианы обладают существенно различной сложностью. В частности, строение не зависящих от времени гамильтонианов более сложно, чем гамильтонианов, зависящих от времени. Одна из причин этого заключается в том, что поскольку в независимой от времени модели три шага — запись, вычисление и сдвиг объединены в один, то область решетки, которая подвержена изменениям на каждом шаге, в этом случае больше, чем в случае зависящей от времени модели.

Другая причина связана с тем, что построение не зависящего от времени гамильтониана требует знания деталей всех вычислений, которые выполняет машина Тьюринга. Это становится очевидным после изучения равенств (39), (42) и (44) или (48). Например, чтобы построить гамильтониан по формуле (42), для каждого стандартного начального выражения γ длины $\leq J$ на вычислительной ленте необходимо знать все *мгновенные описания* и порядок, в котором они появляются в течение первых J шагов вычисления. Это необходимо знать для построения операторов σ_{jk}^γ и P_k^γ , входящих в равенство (48). Это требование эквивалентно решению задачи об остановке в течение первых J шагов произвольного вычисления.

Такое положение вещей крайне нежелательно, потому что любая такая модель становится бесполезной с практической точки зрения. Хочется иметь дело с такой моделью, которая приносила бы новую информацию в ходе вычислений, а не повторяла бы то, что в нее внесено строителем. В частности, гамильтониан должен быть достаточно «прост», чтобы его создание не требовало полного решения задач, для которых эта модель будет использоваться.

Модели с зависящим от времени гамильтонианом с этой точки зрения более удовлетворительны. Построение гамильтонианов записи и сдвига H_1 и H_3 (см. равенства (30) и (33)) не требуют знаний о вычислительной машине Тьюринга. Чтобы построить вычисляющий гамильтониан H_2 (см. равенство (31)) для заданной машины Тьюринга, нужно всего лишь знать функцию τ_Q (см. равенство (1)), которая в равной степени применима ко всем пятеркам множества Q .

Такого рода сведения необходимы для построения любого цифрового компьютера и входной программы, поэтому модели должны быть практичными при вычислениях. Построение соответствующих гамильтонианов не требует знания всех вычислительных орбит модели.

В этой работе построены модели двух типов. В одной из них эволюция локальна во времени и гамильтониан прост, но он зависит от времени. В

другой эволюция глобальна во времени, гамильтониан более сложен, но зато он не зависит от времени.

Можно ли обобщить эти результаты? В частности, все ли глобальные во времени гамильтоновы модели процесса вычисления должны быть достаточно сложными и требовать предварительного знания о всех вычислительных орбитах? Думается, что ответ должен быть положительным. В равной степени важный вопрос звучит так: должны ли быть глобальными во времени любые модели, основанные на не зависящих от времени гамильтонианах?

Для ответа на него заметим, что можно доказать теорему, утверждающую, что всякая гамильтонова модель, в которой унитарный оператор $V(\Delta) = \exp(-i\Delta H)$ переводит за время Δ состояния Ψ_n^γ , соответствующие законченному n -му шагу вычислений, в состояния Ψ_{n+1}^γ , соответствующие законченному $(n+1)$ -му шагу для любых $n = 0, 1, \dots, N_\gamma - 1$ и любых начальных выражений γ (т. е. это — двусторонний сдвиг), как это предписано равенствами (38)–(43), должна быть глобальной во времени. Однако, из этой теоремы не следует, что все модели процесса вычисления с не зависящим от времени гамильтонианом должны быть глобальными во времени. Существуют модели, гамильтонианы которых не зависят от времени и которые локальны во времени [13]. Причина, по которой эти модели избегают ограничения теоремы, заключена в том, что их можно рассматривать как некоторый предел рассматриваемых здесь моделей. Хотя сформулированная теорема справедлива для каждой модели из последовательности, она не верна для предельной модели. Мы надеемся впоследствии вернуться к этому вопросу.

6.4. Диссипация энергии

Еще одним важным свойством моделей с не зависящим от времени гамильтонианом является нулевая диссипация энергии в течение эволюции. Речь идет не только о сохранении энергии, что справедливо в любой системе с не зависящим от времени гамильтонианом, но и об отсутствии ее деградации. В частности, в каждый момент времени $n\Delta$, $n = 0, 1, \dots, N_\gamma - 1$ состояние системы соответствует простой спиновой конфигурации на решетке. Это — не линейная комбинация спиновых состояний $\sum_{m=0}^{N_\gamma-1} c_m(n\Delta) \Psi_m^\gamma$, в которой $c_m(n\Delta) \neq 0$ при $m \neq n$ и абсолютные значения $|c_n(n\Delta)|$ убывают при возрастании n . Такая возможность означает деградацию энергии системы в ходе эволюции.

В моделях с зависящим от времени гамильтонианом диссипация энер-

гии может происходить во внешних устройствах, которые включают и выключают текущие гамильтонианы. Внутри самой модели изменения энергии происходят только на тех шагах, когда гамильтониан, будучи активным, не изменяет те состояния модели, которые она приняла на предыдущем шаге, или приводит модель в такое состояние, которое не изменится в течение последующего шага.

Действительно, равенство (18) означает, что если $\Psi((3m+h)\Delta) = \Psi((3m+h+1)\Delta)$, то при всех $t = (3m+h)\delta + \delta$, $0 < \delta < \Delta$ справедливо соотношение $(\Psi(t), H_{h+1}\Psi(t)) = 2\pi/2\Delta$. Однако если $\Psi((3m+h)\Delta) \neq \Psi((3m+h+1)\Delta)$, то $(\Psi(t), H_{h+1}\Psi(t)) = 0$. Такое происходит, например, если вычисления заканчиваются за $L < J$ шагов, тогда для всех значений t , удовлетворяющих неравенствам $3L\Delta < t < 3J\Delta$, операторы H_1 и H_2 во время их активности изменяют состояния, но активность H_2 к изменению активности не приводит.

Другой аспект, связанный с не зависящим от времени гамильтонианом, — это работа таких моделей вблизи квантовых пределов. В этом случае неопределенность энергии δE , деленная на скорость вычисления $1/\Delta$, близка к пределу, установленному принципом неопределенности [18]. Чтобы убедиться в этом, заметим, что верхний предел неопределенности энергии δE определяется шириной разброса энергии $(2\pi\hbar/\Delta)(1 - 1/(N_\gamma - 1)) \approx 2\pi\hbar/\Delta$. Принцип неопределенности приводит к неравенству $\delta E \gtrsim \hbar/\Delta$.

Для построенных здесь моделей неприменимы оценки пределов скорости вычислений, основанные на соображениях, связанных с диссипацией энергии [11]. Можно, вообще говоря, увеличить скорость вычисления, увеличивая среднюю энергию системы $\langle H_\gamma \rangle$, не создавая при этом ни деградации, ни диссипации энергии. В этом можно убедиться, изучая равенства (48) и (49), из которых следует, что для произвольной конфигурации решетки f

$$\langle H_\gamma \rangle = (\Psi_f^\gamma, H_\gamma \Psi_f^\gamma) = d_{ff} = \frac{\pi\hbar}{\Delta} \left(1 - \frac{1}{N_\gamma} \right) \approx \frac{\pi\hbar}{\Delta} \quad (55)$$

Таким образом, средняя энергия не зависит от f и равна при больших N_γ приблизительно $\pi\hbar/\Delta$. Этот результат легко объяснить, если учесть, что Δ — это время, за которое система выполняет один шаг вычисления (это, грубо говоря, время жизни системы в каждом из состояний Ψ_n^γ), так что скорость вычисления равна $\simeq \langle H_\gamma \rangle / \pi\hbar$. Этот результат поддерживает доводы Дойча [5] и Ландауэра [19], критикующих утверждение Бекенштейна [1] о том, что скорость вычисления можно сделать сколь угодно боль-

шой при увеличении средней энергии машины Тьюринга. Например, если энергия равна 1 электрон-вольту, то скорость вычисления равна приблизительно 4×10^{14} шаг/сек. Если энергия равна 1 эргу, то скорость вычисления $\approx 3 \times 10^{26}$ шаг/сек, что значительно превосходит предел Бекенштейна 10^{15} шаг/сек.

7. Измерения

Чтобы использовать способность наших моделей к вычислениям, нужно уметь совершать измерения параметров, определяющих модели машины Тьюринга.

7.1. Не зависящие от времени модели

Сначала обсудим полный набор измерений машины Тьюринга и параметров системы записи в предложенной здесь модели с гамильтонианом, не зависящим от времени. Результаты этих вычислений должны содержать значения l, λ, j, k, ϕ , которые описывают первые J шагов вычислений и состояния спиновых конфигураций, по мере возвращения в начальное состояние.

Пусть такое измерение требует промежутка длины δ около значения времени $n\Delta$ при $n < J$ и пусть числа $(l\lambda j n \phi)$ определяют состояние машины Тьюринга и системы записи после n шагов. Это состояние описывается вектором $\Psi_{l\lambda j n \phi}^\gamma = \Psi^\gamma(n\Delta)$. Можно показать, что если $\delta \ll \Delta$, то в результате измерения с большой вероятностью равной $1 - c\delta^2/\Delta^2$ (где c — некоторая постоянная) будут получены значения $(l\lambda j n \phi)$. Вероятность других результатов — величина порядка $c\delta^2/\Delta^2$.

Любое такое измерение с необходимостью возмущает состояние системы. Причина этого заключается в том, что модельная система находится в собственном состоянии указанных трех переменных (как это определяется равенством (9)) только в момент времени $t = n\Delta$. Во все другие моменты времени состояние $\Psi^\gamma(t)$ является линейной суперпозицией всех N_γ конфигураций на орбите вычисления и не может быть собственным вектором ни одной из упомянутых выше наблюдаемых.

В частности, можно показать¹, что к концу взаимодействия, осу-

¹Пусть $[\phi_f | f = 0, 1, \dots, N_\gamma - 1]$ и ϕ_b обозначают ортонормированные состояния измерительного аппарата, где ϕ_b — это начальное состояние аппарата. Пусть гамильтониан измерения равен $H' = (\pi\hbar/2\delta)[\sum_f (P_f \otimes \sigma_f) - 1]$, где P_f — проекционный оператор, выделяющий состояние Ψ_f^γ , а оператор σ_f переставляет состояния ϕ_f и ϕ_b . Измерение

шествующего измерения, в момент $n\Delta + \delta/2$, состояние системы, которое соответствовало числам $(l\lambda j n\phi)$, определяется вектором $\theta_{l\lambda j n\phi}^\gamma$, где $|\theta_{l\lambda j n\phi}^\gamma|^2 = 1 - c\delta^2/\Delta^2$ и

$$\theta_{l\lambda j n\phi}^\gamma = \Phi + \Psi^\gamma(n\Delta + \delta/2) \left(\Psi^\gamma(n\Delta + \delta/2) |, \theta_{l\gamma j n\phi}^\gamma \right),$$

Φ — это (ненормированное) состояние, которое ортогонально к $\Psi^\gamma(n\Delta + \delta/2)$, причем главное слагаемое в разложении квадрата модуля этого вектора по степеням δ/Δ имеет порядок δ^2/Δ^2 . Поскольку $\Psi^\gamma(n\Delta + \delta/2)$ — это состояние, в котором находилась бы система в отсутствие измерения, то Φ представляет собой возмущение, вызванное измерением, призванным выделить числа $l\lambda j n\phi$.

Состояния модели θ_f^γ , ассоциированные с другими исходами f , таковы, что $|\theta_f^\gamma|^2 < c\delta^2/\Delta^2$. Они соответствуют большому возмущению состояния системы во время измерения, поэтому его нельзя считать представителем какой-либо стадии вычисления машины Тьюринга.

Вышеприведенное показывает, что если полная система измерений должна принести правильный результат с близкой к единице вероятностью и не слишком изменить состояние системы, то длительность измерения δ должна быть много меньше интервала между вычислительными шагами Δ . Сделать это трудно, особенно если длина отрезка Δ мала.

Другим следствием того, что полное измерение, производимое за конечное время δ , с необходимостью возмущает состояние системы, является то обстоятельство, что измерение с необходимостью приводит к диссипации энергии. В этом можно убедиться, заметив, что состояние системы в конце измерения уже не чистое состояние, а смешанное состояние с конечной энтропией. (Матрица плотности этого состояния получается после вычисления следа по степеням свободы измерительного прибора объединенной матрицы плотности большой системы «модель + измерительный аппарат».) Диссипация энергии, которую можно определить как разность энергии системы в начальном состоянии и энергии конечного состояния $\theta_{l\gamma j n\phi}^\gamma$, равна $\pi\hbar/\Delta - \left(\theta_{l\gamma j n\phi}^\gamma, H_\gamma \theta_{l\gamma j n\phi}^\gamma \right)$, т. е. $(K\delta^2/\Delta^2)(\pi\hbar/\Delta)$, где K — постоянная порядка единицы.

Очевидно, что для избежания заметного возмущения состояний системы и диссипации энергии длительность измерения δ должна быть зна-

описывается гамильтонианом H' , который включается в момент времени $n\Delta - \delta/2$ и выключается в момент $n\Delta + \delta/2$, вместе с гамильтонианом H_γ (уравнение (48)), который действует постоянно. Состояние системы «модель + аппарат» в момент времени $n\Delta + \delta/2$ определяется формулой $\sum_f \theta_f^\gamma \otimes \phi_f + \theta_b^\gamma \otimes \phi_b$. Свойства θ_f^γ и θ_b^γ описаны в тексте.

чительно меньше длительности шага вычислений $\delta \ll \Delta$. Однако можно убедиться в том, как трудно этого достичь. Ясно, что лучше избежать подобных измерений.

Можно выяснить, закончено вычисление или нет, не производя полного измерения. Для этого нужно изучить только часть системы: две соседние клетки системы записи. Если содержимое k -й и $(k + 1)$ -й клеток, проверенное в промежутке времени между $(k + 2)\Delta$ и $J\Delta$, одинаково, то вычисление закончилось до k -го шага. Противоположный результат означает, что вычисления не остановились на k -м шаге.

Обсудим свойства измерений такого рода. В этом случае также в систему будет внесено возмущение, если продолжительность измерения ограничена условием $\delta < \Delta$. Однако практически изменение состояния при переходе от k -й к $(k + 1)$ -й клетке может быть достаточно малым, чтобы позволить увеличить длительность измерения до нескольких Δ , не опасаясь большого возмущения состояния и значительной диссипации энергии. Более точные оценки, которые зависят от чисел n , k и параметров системы, можно получить исходя из равенства (54) для таких n , что $k < n < J$.

7.2. Модели с гамильтонианами, зависящими от времени

Полный набор измерений таких моделей также возмущает состояние системы и приводит к диссипации энергии, даже если продолжительность измерения меньше Δ . Однако измерения остановки, которые проверяют k -ю и $(k + 1)$ -ю клетки в промежутке времени $3(k + 1)\Delta < t < 3J\Delta$, не возмущают состояния системы и не приводят к диссипации энергии. Причина этого явления заключена в локальности по времени. Состояния подсистем в этом случае строго стационарны, пока соответствующие шаги не приведут к их изменению. Это заключение вытекает из равенства (53), которое показывает, что состояние любой подсистемы, которая одинаково входит в Ψ_n^γ и Ψ_{n+1}^γ , оказывается стационарным во все промежутки времени между $n\Delta$ и $(n + 1)\Delta$. Это и означает, что продолжительность таких измерений, как измерения остановки, не должна быть ограничена временем одного вычисления и может составлять несколько Δ .

8. Обсуждение

Полезно бросить беглый взгляд на достоинства и недостатки построенных здесь моделей. Модели с не зависящими от времени гамильтонианами

нами хороши тем, что они не зависят от времени — нет необходимости во вмешательстве извне. Кроме того, они не рассеивают энергию, состояние системы не деградирует и работают машины на квантовом пределе, так что отношение неопределенности энергии и скорости вычисления $< 2\pi\hbar$. К сожалению, такие машины чрезвычайно чувствительны к внешним воздействиям. Кроме того, гамильтонианы таких моделей столь сложны, что и конструирование требует предварительного знания о всех J шагах орбиты вычисления моделируемой машины Тьюринга. Наконец, эволюция в этом случае глобальна во времени. В результате все измерения, даже если они ограничиваются отдельной подсистемой, возмущают состояния модели и приводят к диссипации энергии. Это происходит даже в том случае, если продолжительность измерения меньше, чем длительность шага вычисления — это требование должно быть выполнено для любого измерения.

Зависящие от времени модели обладают тем преимуществом, что в них нет деградации состояний. Кроме того, гамильтонианы в этом случае менее сложны. В частности, для любой машины Тьюринга построение гамильтониана требует знания функции τ_Q (см. равенство (1)). Нет необходимости знать всю орбиту вычисления продолжительностью в J шагов. Наконец, эволюция в этом случае локальна во времени. Вследствие этого измерения, ограниченные подходящей подсистемой, такие как измерения остановки, не возмущают систему и не приводят к диссипации энергии. Недостаток моделей заключается в их крайней чувствительности к внешним воздействиям. Кроме того, необходимы внешние устройства, включающие и выключающие шаги записи, вычисления и сдвига.

В моделях, которые обсуждалось в работах [13–15] в качестве устройств, обеспечивающих эти переключения, использовались движущаяся система, рассеивающаяся на системе фиксированных рассеивателей или набор движущихся систем, рассеивающихся на фиксированном рассеивателе. Параметры модели фиксируются так, чтобы рассеяние одной системы на одном рассеивателе соответствовало одному вычислительному шагу модели. В этих моделях гамильтониан не зависит от времени и в приближении, которое использовалось в одной из работ [13], модели оказываются локальными во времени и в них отсутствуют деградация состояний и диссипация энергии. Другие модели [14,15] обнаруживают деградацию и диссипацию даже в том случае, если измерения не производятся. Эти модели, кроме того, локальны во времени и в рамках некоторых аппроксимаций могут рассматриваться как точные. Далее, гамильтонианы этих моделей могут быть менее сложными, чем рассмотренные здесь за-

висящие от времени гамильтонианы машины Тьюринга. Наконец, модели с последовательным рассеянием привлекательны тем, что соответствие модели машине Тьюринга не разрушается и после J шагов вычисления, так что измерения в этом случае могут длиться так долго, как это заблагорассудится.

В заключение заметим, что здесь показана математическая осуществимость недиссипативной квантовомеханической гамильтоновой модели, выполняющей конечное число вычислительных шагов любой машины Тьюринга. Однако остается открытым вопрос, можно ли построить такие модели в лаборатории. Например, если принять как истинное утверждение о том, что в лаборатории можно построить не более чем бесконечно счетное число моделей, то большинство математически существующих гамильтонианов не может быть реализовано физически.

С другой стороны, существование таких гамильтонианов означает, что следует быть осторожным при предположениях о том, что процесс вычисления должен рассеивать энергию и не может быть реализован моделями, близкими к квантовому пределу. Результаты этой работы показывают, что аргументы тех, кто утверждает, что подобные модели вычислений не могут быть реализованы в принципе, не могут быть основаны на отсутствии гамильтоновых моделей. Для опровержения следует обратиться к другим принципам.

Список литературы

- [1] Jacob D. Bekenstein, *Phys. Rev. Lett.* 46, 623 (1981).
- [2] Charles H. Bennet, *IBM J. Res. Dev.* 17, 525 (1973).
- [3] Hans J. Bremerman, Part I. *Limitations on Data Processing Arising From Quantum Theory*, in *Self-Organizing Systems*, M. C. Yovits, G. T. Jacobi and G. D. Goldstein, eds. (Spartan Books, Washington, D. C., 1967).
- [4] Hans J. Bremerman, *Energy and Entropy Costs in Information Transfer and Computing*, Preprint to appear in Proceedings of Conference on Physics of Computation, MIT, May 6–8, 1981.
- [5] David Deutsch, *Phys. Rev. Lett.* 48, 286 (1982).
- [6] Robert W. Keyes, *Proc. IEEE* 69, 267 (1981); Rolf Landauer, *Fundamental Physical Limitations of the Computational Process*. Preprint. 1981; *Ber. Bunsenges. Phys. Chem.* 80, 1048 (1976).

- [7] Rolf Landauer, *IBM J. Res. Dev.* 5, 183 (1961); Rolf Landauer and James W. F. Woo, *Appl. Phys.* 42, 2301 (1971); Robert W. Keyes and Rolf Landauer, *IBM J. Res. Dev.* 14, 152 (1970).
- [8] K. K. Likharev, *Classical and Quantum Limitations on Energy Consumption in Computing*, to appear in *Proceedings of Conference on Physics of Computation*. MIT, May 6–8, 1981.
- [9] L. B. Levitin, *Physical Limitations of Rate, Depth and Minimum Energy in Information Processing*, Preprint, Dielfeld University.
- [10] D. Mundici, *Nuovo Cimento* 61B, 297 (1981).
- [11] Rolf Landauer, Preprint, to appear in *Proceedings of Conference on Physics of Computation*. MIT, May 6–8, 1981. *Int. J. Theor. Phys.* 21, 283 (1982).
- [12] Edward Fredkin and Tommaso Toffoli, *Conservative Logic*. Tech. Memo., MIT/LCS/TM–197, April 29, 1981.
- [13] Paul Benioff, *J. Stat. Phys.* 22, 563 (1980).
- [14] Paul Benioff, *J. Math. Phys.* 22, 495 (1981).
- [15] Paul Benioff, *Quantum Mechanical Hamiltonian Models of Discrete Processes that Erase Their Own Histories: Application to Turing Machines*, in *Proceedings of Conference on Physics of Computation MIT*, May 6–8, 1981.
- [16] Martin Davis, *Computability and Unsolvability* (McGraw Hill, New York, 1958).
- [17] Hartley Rogers, Jr., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability* (McGraw Hill, New York, 1965), pp. 64, 65.
- [18] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Vol. I (John Wiley and Sons, New York, 1958), Chap. IV, Sec. 10.
- [19] Rolf Landauer, Informal Notes, 1981.