

Анализ доходности и волатильности финансовых активов с использованием моделей ARIMA-(E)GARCH и ARFIMA-FIGARCH

Дука О.С

1. В последние годы многие авторы исследовали финансовые рынки, предполагая возможность существования на рынке динамического самоповторяющегося в разном масштабе поведения, характеризующегося долгосрочной памятью, - оспаривая тем самым теорию эффективного рынка. В данной статье финансовые временные ряды, которые характеризуются наличием долгосрочной памяти, анализируются при помощи фрактальных эконометрических моделей (на примере логарифмированных доходностей акций, драгметаллов, форекса).

Длинная память – свойство, описывающее корреляционную структуру высокого порядка временного ряда.¹ А поскольку такая корреляционная структура создает нелинейную зависимость в первых моментах распределения, то эффективность финансового рынка оказывается под вопросом (теоретически, цена актива на эффективном рынке должна следовать мартингалльному процессу, в котором каждое ценовое изменение независимо). Однако проблема состоит в том, что длинная память есть особая форма нелинейной динамики, и для ее анализа требуется разработка новых нелинейных моделей оценки, учитывающих существование значимой автокорреляции в моментах высших порядков. Впервые процессы с длинной памятью были разработаны Хёрстом (1951) при изучении вместимости образующего водохранилища для проектирования нильской плотины. Хёрст разрабатывал методики исследования характера цикличности разливов Нила. Он показал, что в рядах данных существует самоповторяющаяся структура с долгосрочной памятью,

¹ Стационарный процесс X_t является процессом с длинной памятью, если существует действительное

число a , $0 < a < 1$, и константа c , $c > 0$, для которых выполняется условие: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_k}{ck^{-a}} = 1$, где ρ – функция автокорреляции и k – номер лага. То есть автокорреляции процесса с длинной памятью удовлетворяют

следующему асимптотическому соотношению: $\rho_k = ck^{-a}$ при k стремящемся к бесконечности. Таким образом, убывание автокорреляций происходит крайне медленно, по гиперболе. Так же следует отметить различие между долгосрочной и бесконечной памятью: в первом случае эффект шока постепенно исчезает во времени, а во втором – действует во все последующие моменты и меняет исходный равновесный уровень. Принципиально важно здесь следующее: модель, учитывающая длинную память, более точно описывает финансовые ряды и дает возможность получения лучшего прогноза в сравнении с классическими методами.

что необходимо учитывать, а также предложил R/S анализ, метод, позволяющий обнаружить наличие длинной памяти в рядах.

Обычно при анализе временного ряда на финансовых рынках, в первую очередь определяется порядок интегрированности ряда (значение параметра d процесса ARIMA (p, d, q)). Как правило, рассматриваются случаи, когда d равен 0 (короткая память ряда) и 1 (бесконечная память). После исследований о наличии долгосрочной памяти на финансовых рынках (последствия шока оказываются временными, но длительными, персистентность) Гренджер и Джойо (1980) предложили новый класс моделей ARFIMA (p, d, q) , допускающий возможность нецелого параметра d .

А в 1996 году Боллерслев ввел модель FIGARCH (Fractionally integrated GARCH) для исследования волатильностей финансовых активов с наличием долгосрочной памяти, что стало синтезом предыдущих исследований.

Перцовский (2004) предложил рассматривать совместную модель ARFIMA-FIGARCH для исследования одновременного существования долгосрочной памяти у доходностей и волатильностей финансовых активов.

И в работе Э. Петерса «Фрактальный анализ финансовых рынков: приложение теории хаоса в инвестициях и экономике» (1994 – год выхода книги в Штатах, 2004 – в России) формулируется теория фрактального рынка в качестве альтернативы теории эффективного рынка. В основе теории фрактального рынка лежит следующая предпосылка: рынок обладает фрактальной структурой в связи с различными временными горизонтами инвестирования и, соответственно, различной ликвидностью актива, а рыночные активы обладают долгосрочной памятью.

2. Математический инструментарий:

Для определения фрактальной структуры временных рядов используется **модель Хёрста**.

В рамках созданного им R/S анализа было использовано уравнение вида

$$\ln(R/S)_n = \ln C + H * \ln(n), \quad \text{где} \quad R_n = \max(Y_1..Y_n) - \min(Y_1..Y_n), \quad Y_i = \sum_{j=1}^i x_j - i\bar{x},$$

$$S_i = \sqrt{1/n \sum_i (x_i - \bar{x})^2},$$

позволяющее оценить показатель Хёрста H , используемый для классификации временных рядов x (см. табл.ниже).

H	< 0,5	Корреляция отсутствует, антиперсистентный процесс. Смена тенденции на противоположную.
	0,5	Винеровский процесс, корреляция отсутствует, процесс с нулевой памятью.
	> 0,5	Корреляция положительна, процесс персистентный, сохраняющий тенденцию. Обобщенное броуновское движение. Память.
	1	Гладкая функция, имеющая хотя бы одну производную.
	> 1	Статистика Леви. Процессы с фрактальным временем, временные точки разрыва производной.

Для расчета коэффициента Хёрста были использованы данные с предварительно удаленной краткосрочной памятью, описываемой моделью ARIMA(1,0,0).

ARIMA-EGARCH.

Экспоненциальная форма модели GARCH (EGARCH) была впервые предложена Нельсоном (1991).

$$\Phi(L)(y_t - \mu) = \Theta(L)\varepsilon_t \quad \varepsilon_t - \text{iid}(0, 1)$$

$$\varepsilon_t = \xi_t \sigma_t \quad \log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \delta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\xi_{t-i})$$

$$\text{где } g(\xi_t) = \theta \xi_t + \gamma(|\xi_t| - E|\xi_t|)$$

Таким образом, в EGARCH σ_t^2 зависит и от величины, и от знаков лагов ε_t , что вводит в модель эффект леввереджа, то есть асимметричную реакцию условной вариации на положительные и отрицательные изменения доходности финансового актива.

ARFIMA-FIGARCH.

Процесс ARFIMA является общим процессом, включающим процессы краткосрочной памяти AR или MA поверх процесса Хёрста (долговременной памяти). Процесс FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH) задает условную вариацию и допускает наличие долгосрочной памяти в рядах волатильности.

В общем виде модель может быть представлена как:

$$\Phi(L)(1-L)^d(y_t - \mu) = \Theta(L)\varepsilon_t; \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t; \quad \varepsilon_t - D(0,1), \quad \text{где } D(0,1) - \text{некоторая функция}$$

плотности распределения и

$$\sigma_t^2(\omega, \varphi, \beta, \xi) = \omega + [1 - (1 - \beta(L))^{-1} \varphi(L)(1-L)^\xi] \varepsilon_t^2$$

Модель допускает одновременное наличие долгосрочной памяти, как в рядах доходности финансовых активов, так и в рядах волатильности, с использованием различных типов распределений ошибок и включением некоторых дополнительных объясняющих переменных.

3. Моделирование.

Я предположила, что финансовые ряды, характеризующиеся наличием длинной памяти, лучше и точнее моделируются фрактальными эконометрическими моделями, все прочие – классическими линейными и нелинейными модели. Эту гипотезу я и тестировала.

Я привожу в статье сравнительное моделирование всего двух активов в качестве наглядной демонстрации, однако анализ проводился по большему числу данных (см. приложение). Выводы были идентичным для всех случаев – гипотеза не отвергается.

Итак. Предварительно была проведена обработка данных, заключающаяся в следующем преобразовании финансовых данных по каждому активу: $LOG(\frac{P_{t+1}}{P_t})$. Для расчета

коэффициента Хёрста я использовала данные с предварительно удаленным трендом (сведение смещения к минимуму, устранение краткосрочной памяти) по каждому из выбранных активов. Для этого рассчитывалась модель ARIMA (1,0,0) и брался остаток

AR(1) во времени t . $S_t = \log(\frac{P_t}{P_{t-1}})$, $X_t = S_t - (\alpha + \beta * S_{t-1})$, остаток во времени t . Далее

выполняется R/S анализ.

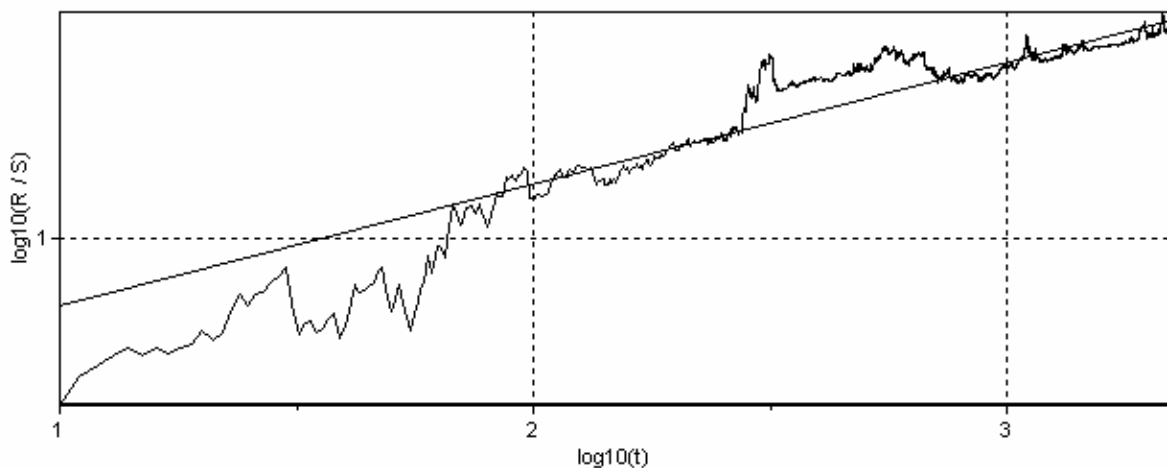
Кроме того, я проводила тестирование рядов доходностей с помощью критерия Дики-Фуллера. Тестирование показало, что все временные ряды являются DS (разностно-стационарными) рядами, и, следовательно, во всех моделях будет присутствовать AR(1) разница с целью устранить краткосрочные шумы, сделав ряды стационарными.

В результате анализа временных рядов AR(1) были получены показатели Хёрста для следующих активов (остальные смотрите в приложении):

Актив	Значение показателя Хёрста	Классификация ряда
SBUX	0.3121 ± 0.1172	Антиперсистентный
QQQQ	0.6628 ± 0.1297	Персистентный

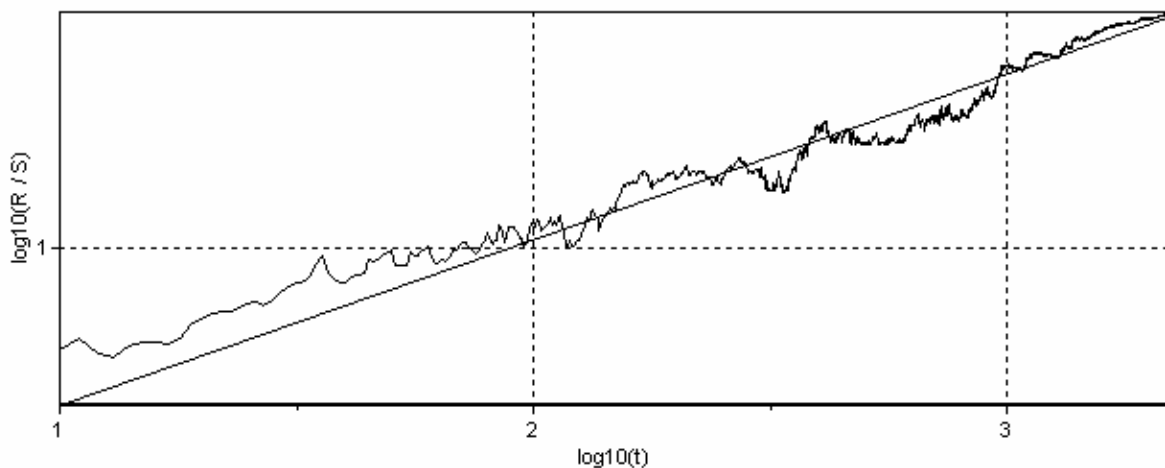
При антиперсистентном стохастическом процессе после возрастания переменной обычно происходит ее уменьшение, а после уменьшения - возрастание. На рисунке 1 SBUX ведет себя подобным образом, что подтверждает полученные для него показатели Хёрста.

Рис 1. SBUX



При персистентном процессе если приращения были положительными в течение некоторого времени в прошлом, т. е. происходило увеличение, то и впредь в среднем будет происходить увеличение. И наоборот, тенденция к уменьшению в прошлом означает, в среднем, уменьшение в будущем (см. рисунок 2).

Рис 2. QQQQ



Далее ряды моделировались с помощью моделей ARIMA-(E)GARCH и ARFIMA-FIGARCH, полученные результаты сравнивались, определялась наилучшая модель.

		ARFIMA (1,1,0,1)	ARFIMA (1,1,1,1)	ARIMA(1,0,0)- EGARCH (1,0)	ARIMA(1,0,0)- GARCH (1,1)
SBUX	Критерий Акаике	-4.65		-4.42	
	Критерий Шварца	-4.63		-4.41	
	max L	4420		4010	
QQQQ	Критерий Акаике		-5.134		-5.142
	Критерий Шварца		-5.112		-5.112
	max L		4661		4668

Как видно из проведенного анализа, SBUX, который является антиперсистентным, лучше описывается моделями ARIMA-EGARCH, а персистентный QQQQ – моделью ARFIMA-FIGARCH.

Приведенные примеры интересны тем, что и SBUX, и QQQQ (привязана к NASDAQ) являются акциями. Что дает побочный, однако, достаточно любопытный вывод: разные активы одного и того же рынка (например, фондового) могут обладать, и могут не обладать фрактальной структурой. Причины этого явления мне до сих пор не ясны.

Петерс касается в своей книге этого момента, но никак его не поясняет. Однако если отталкиваться от его теории, то следует признать, что отсутствие фрактальной структуры в каком-то активе означает, что в нем всегда один горизонт инвестирования; моя практика такую гипотезу отвергает. ☺ Еще можно предположить, что фрактальные структуры на рынке создаются нерациональными игроками и действиями толпы. Но тогда остается сделать вывод, что SBUX не обладает длинной памятью, потому что его торгуют исключительно рациональные игроки (или игроки, торгующие из фундаментальных соображений). В это, честно говоря, поверить не менее сложно. Так или иначе, вопрос остается открытым.

4. В завершение добавлю: анализ показывает, что активы с наличием длинной памяти на рынке встречаются достаточно часто, и моделирование таких активов должно осуществляться с учетом этого фактора. Предложенная в статье методика – первая попытка синтеза существующих методов моделирования финансовых данных с использованием фракталов, и потому далека от идеала. Так что конструктивный feedback приветствуется!

Литература:

1. Bollerslev, T., Engle, R.F., Nelson, D.B., ARCH models. In: Engle, R.F., McFadden, D. (Eds.) // Handbook of Econometrics, Vol. IV. North-Holland, Amsterdam, 1994
2. Baillie. R.T., C.-F. Chung, and M.A. Tieslau, Analyzing inflation by the fractionally integrated ARFIMA-GARCH model // Journal of Applied Econometrics, 1996
3. Bollerslev T., Baillie R.T., Mikkelsen H.O. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of econometrics 74, 1996, p 3-30
4. Cheung Y.W. Long memory in foreign exchange rates //Journal of business and economic statistics 11, 1993
5. Campbell J. Y., Lo A. W., MacKinlay A. C., The econometrics of financial markets. – Princeton University Press, 1997
6. Fama E., The behavior of stock prices // Journal of Business 38, 1965
7. Fama E., Portfolio analysis in a stable Paretian market, Management science 11, 1965
8. French K.R., Roll R. Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders // Journal of Financial Economics N 17, 1998.
9. Galbraith J.W., Zinde-Walsh V. Autoregression-Based Estimators for ARFIMA Models, CIRANO, Montréal , February 2001
10. Granger C.W.J., Joyeux R. An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing // Journal of Time Series Analysis, 1980
11. Hsieh D.A. Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets //The journal of finance, vol. 46, 1991
12. Li W.K., McLeod A.I., Fractional time series modeling // Biometrika 73, 1986
13. Lo A., Long term memory in stock market prices, NBER Working paper 2984,1989
14. Lo A., MacKinlay A.C., Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test // Review of financial studies 1, 1988
15. Mandelbrot B., The variation of some other speculative prices //Journal of Business 39, 1966

16. Mandelbrot B., The variation of certain speculative prices //Journal of Business 36, 1963
17. Mandelbrot B., The fractal geometry of nature, NY: W.H.Freeman, 1982
18. Nelson D. Conditional Heteroskedasticity in asset returns: a new approach //Econometrica, Vol 59, No 2, p 347-370, 1991
19. Phillippe J. Financial Risk Manager Handbook, 2nd Edition, GARP, 2003
20. Peters E., Fractal structure in the capital markets //Financial analysis journal, 1989
21. Peters E., Chaos and order in the capital markets. NY: John Wiley & Sons, 1991
22. Samuelson P.A. Efficient portfolio selection for Pareto-Levy investments //Journal of financial and quantitative analysis, 1967
23. Sentana E. Quadratic ARCH models // Review of economic studies No 62; 1995
24. Schwert G.W., Stock market volatility // Financial analysis journal, 1990
25. Sharpe W.F. Portfolio theory and capital markets, NY: McGraw-Hill, 1970
26. Перцовский О.Е. Моделирование валютных рынков на основе процессов с длинной памятью, препринт ГУ ВШЭ, 2004
27. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: приложение теории хаоса в инвестициях и экономике, «Интернет-трейдинг», Москва, 2004

Приложение.**Таблица 1. Классификация активов по показателю Хёрста.**

Актив	Значение показателя Хёрста	Классификация ряда
GOLD	0.4746 ± 0.1162	Антиперсистентный
PLATINUM	0.4031 ± 0.0894	Антиперсистентный
SILVER	0.5202 ± 0.1003	Персистентный
EUR	0.5697 ± 0.1023	Персистентный
GBP	0.5433 ± 0.1747	Персистентный
MSFT	0.5213 ± 0.1166	Персистентный
DELL	0.5487 ± 0.1536	Персистентный
SBUX	0.3121 ± 0.1172	Антиперсистентный
QQQQ	0.6628 ± 0.1297	Персистентный